Oberlin College Library
MAY 29 1923

Physikalische Zeitschrift

Begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

Herausgeber:
Professor Dr. **M. Born** und
Professor Dr. **P. Debye**

Schriftleiter:
Dr. **Hans Küstner** in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von vierteljährlich 6000 Mark, bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband 7000 Mark, im Ausland Schweiz. Frcs. 9.— Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit 150.— Mark, Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

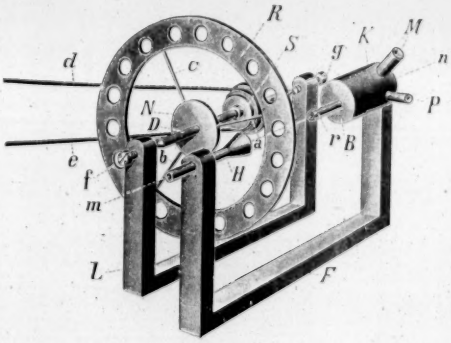
Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten entweder an die Herausgeber: Professor Dr. M. Born, Göttingen, Planckstraße 21, und Professor Dr. P. Debye, Zürich, Physikgebäude, Gloriastr. 35 oder an die Schriftleitung: Dr. Hans Küstner, Göttingen, Bunsenstraße 9, Physikalisches Institut der Universität, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von **S. Hirzel** in Leipzig, Königstraße 2.

No. 8. Leipzig, 15. April 1923. No. 636 24. Jahrgang.

Phys.-mech. Institut von Prof. Dr. M. Th. Edelmann & Sohn,

München.



Normal-Sirene

zur

rationellen Messung von Tonstärken.

Katalog 30 erschienen und ebenso wie Spezialliste No. 29 über Saitengalvanometer und Registrierapparate, Spezialliste No. 31 über einfache Präzisionsschulapparate gratis und franko.

Mit einer Beilage von S. Hirzel in Leipzig, betreffend: Aston, Isotrope.

Inhaltsverzeichnis:

	Seite
Debye, P., Zerstreuung von Röntgenstrahlen und Quantentheorie	161
Edelgase: Das Verhalten von langsamen Elektronen in —, v. F. Zwicky	171
Einstein, A., H. A. Lorentz, H. Minkowski, Das Relativitätsprinzip. (B.)	184
Elektronen: Das Verhalten von langsamen — in Edelgasen, v. F. Zwicky	171
Hort, W., Technische Schwingungslehre. (B.)	184
Lorentz, H. A., A. Einstein, H. Minkowski, Das Relativitätsprinzip. (B.)	184
Lutz, C. W., Saitenelektrometer neuer Form	166
Minkowski, H., H. A. Lorentz, A. Einstein, Das Relativitätsprinzip. (B.)	184
Quantentheorie: Zerstreuung von Röntgenstrahlen und —, v. P. Debye	161
Relativitätsprinzip: Das —, v. H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski. (B.)	184
Röntgenstrahlen: Zerstreuung von — und Quantentheorie, v. P. Debye	161
Saitenelektrometer neuer Form, v. C. W. Lutz	166
Schwingungslehre: Technische —, v. W. Hort. (B.)	184
Zwicky, F., Das Verhalten von langsamen Elektronen in Edelgasen	171

Verlag von S. Hirzel in Leipzig

Infolge der bedeutend gestiegenen Herstellungskosten mußte der Bezugspreis der Physikalischen Zeitschrift für das 2. Vierteljahr 1923 auf

6000 Mark

erhöht werden. Diese Erhöhung konnte den Postämtern nicht mehr rechtzeitig mitgeteilt werden und es sind von diesen nur 3000 Mark erhoben worden. Ich bitte daher die verehrten Leser, die die Zeitschrift bei der Post bestellt haben, den Restbetrag von 3000 Mark unter Benutzung der beiliegenden Zahlkarte direkt an mich einzusenden.

S. Hirzel

Neuste Konstruktion!

Kugelepiskop. D.R.P. 250314.

Franz Schmidt & Haensch

Berlin S. 42, Prinzessinnenstraße 16

Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Optik.

Neue optische Spezialinstrumente eigener Konstruktion, Polarisations-, Spektral-, Projektionsapparate, Episkope u. a.

Preislisten kostenlos.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 8. 15. April 1923. Redaktionsschluß für No. 10 am 5. Mai 1923. 24. Jahrgang.

INHALT.

Originalmitteilungen:

P. Debye, Zerstreuung von Röntgenstrahlen und Quantentheorie. S. 161.

C. W. Lutz, Saitenelektrometer neuer Form. S. 166.

F. Zwicky, Das Verhalten von langsamen Elektronen in Edelgasen. S. 171.

Besprechungen:

W. Hort, Technische Schwingungslehre. S. 184.

H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, Das Relativitätsprinzip. S. 184.

Personalien. S. 184.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zerstreuung von Röntgenstrahlen und Quantentheorie.

Von P. Debye.

I. Zerstreute Röntgenstrahlung zeigt bekanntlich Polarisation und ungleichmäßige Verteilung der Intensität auf die verschiedenen Richtungen im Raum. Berechnet man die von einem freien Elektron ausgehende Strahlung nach den Gesetzen der Elektrodynamik, so ist der theoretische Befund, wie J. J. Thomson zeigte, in qualitativer Übereinstimmung mit der Erfahrung. So wird die von Barkla beobachtete Polarisation durch die Rechnung wiedergegeben; auch wird in gleicher und entgegengesetzter Richtung des Primärstrahls mehr zerstreut als senkrecht dazu. Ist Θ der Winkel zwischen Primär- und Sekundärstrahl, so folgt für die Winkelabhängigkeit der zerstreuten Intensität i_s die Formel

$$i_s \sim \frac{1+\cos^2\Theta}{2}.$$

Bei verhältnismäßig großer Wellenlänge der Primärstrahlung besteht aber zwischen beobachteter und berechneter Intensitätsverteilung ein wesentlicher Unterschied. Nach vorne ($\vartheta = 0$) wird praktisch sehr erheblich mehr gestrahlt als nach hinten ($\vartheta = \pi$). Es konnte gezeigt werden, daß dieser Effekt daher rührt, daß die Abstände der Elektronen im Atom voneinander von derselben Größenordnung sind, wie die Wellenlänge der bei solchen Versuchen benutzten Röntgenstrahlung. Infolgedessen interferieren die Sekundärstrahlen der Elektronen eines Atoms untereinander und es wird die Streuintensität bei mittlerer Wellenlänge rechnerisch für $\Theta = 0$ proportional z^2 und für $\Theta = \pi$ proportional z, wenn z die Elektronenzahl im Atom bedeutet[1]).

Geht man nun zu ganz kleinen Wellenlängen über, so sollte der Interferenzeffekt sich der Rechnung nach auf einen immer kleineren Winkelbereich in der Umgebung von $\Theta = 0$ zusammenziehen und die Intensität im übrigen Bereich durch die Thomsonsche Formel wiedergegeben werden. Alle Versuchsergebnisse mit kurzen Wellen stehen damit in Widerspruch. Im Folgenden möchte ich einige Überlegungen vorbringen, welche sich ausschließlich auf das Gebiet dieser kurzen Wellen beziehen.

Vier Punkte scheinen mir besonders beachtenswert:

1. Die Streustrahlung ist in Richtung der Primärstrahlung ($\Theta = 0$), wesentlich stärker als in entgegengesetzter Richtung ($\Theta = \pi$), im Gegensatz zu der rechnerisch ermittelten Proportionalität mit $(1+\cos^2\Theta)$.
2. Es scheint nunmehr sicher zu sein, daß die Streustrahlung in Richtung des Primärstrahls härter ist als in entgegengesetzter Richtung. Die Wellenlänge bleibt also nicht erhalten, wieder im Gegensatz zu den Ergebnissen der oben besprochenen Rechnungen.
3. Die Gesamtenergie der zerstreuten Strahlung sinkt unter dem der Thomsonschen Rechnung entsprechenden Grenzwerte. Dieser stand andererseits in Übereinstimmung mit dem von Barkla experimentell zu 0,2 ermittelten Verhältnis von Zerstreuungskoeffizient s zur Dichte ϱ unter der heute nicht mehr zu bezweifelnden Annahme, daß bei leichten Elementen die Elektronenzahl der Atomnummer gleich ist.
4. Jede Zerstreuung ist stets begleitet von einer Elektronenemission. Je kürzer die Wellenlänge wird, um so mehr scheinen die Elektronen in Richtung des Primärstrahls fortgeschleudert zu werden.

Die Versuche sind wohl nicht alle so eindeutig in ihren Ergebnissen, daß die Behauptungen 1 bis 4 in allen Einzelheiten als experimentell vollkommen sichergestellt gelten können. Immerhin habe ich in letzter Zeit aus einer Zusammenstellung von A. H. Compton[1]) den Eindruck gewonnen, daß sie mit großer

1) P. Debye, Ann. d. Phys. **46**, 809, 1915; vgl. auch die zusammenfassende Darstellung in den „Naturwissenschaften" 1922, Heft 16.

1) Bulletin of the national research council, Vol. 4, Part. 2, Number 20, Oktober 1922 (National Academy of sciences, Washington D.C.). Ich möchte dahin auch verweisen für alle genauen Literaturangaben.

Wahrscheinlichkeit zutreffen. Ich will deshalb nicht länger zögern, eine Erklärung für diese Effekte mit Hilfe der Quantentheorie zur Diskussion zu stellen, welche sich mir vor längerer Zeit als möglich ergab.

2. Es sei angenommen, daß die klassische Elektrodynamik auch für die Berechnung der Streustrahlung eines freien durch Primärstrahlen angeregten Elektrons versagt und durch eine Quantenauffassung ersetzt werden muß. Im Speziellen gelte folgendes Bild. Die primäre Röntgenstrahlung der Frequenz ν_0 überträgt auf ein freies Elektron[1]) in einem Einzelprozeß die Energie $h\nu_0$. Diese Energie setzt sich quantitativ um, indem sie dazu dient, erstens einen Sekundärstrahl von der Frequenz ν und dem Energiebetrag $h\nu$ zu erzeugen und zweitens dem Elektron eine Geschwindigkeit v zu erteilen.

Die Sekundärstrahlung sei im Sinne von Einstein als „Nadelstrahlung" aufgefaßt. Auf Grund dieser Prämissen läßt sich jetzt ein sehr detailliertes Bild des Prozesses gewinnen, wenn man a) den Energiesatz und b) den Impulssatz auch auf diesem Gebiete als zutreffend annimmt. Die beiden Sätze sind ohne Zusatzhypothesen allein ausreichend.

Die Geschwindigkeiten der Elektronen werden vergleichbar werden mit der Lichtgeschwindigkeit c; wir rechnen deshalb mit den Formeln der Relativitätstheorie und haben dementsprechend für die Energie eines Elektrons mit der Ruhmasse m, das sich mit der Geschwindigkeit v bewegt

$$E = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right), \qquad (1)$$

wenn wie üblich

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad (1')$$

gesetzt wird.

Für den (in Richtung der Geschwindigkeit gerichteten) Impuls I gilt

$$I = \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (2)$$

Die Anwendung des Energiesatzes liefert die erste Gleichung

$$h\nu_0 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) + h\nu. \qquad (I)$$

Es sei nun angenommen, daß der Sekundärstrahl fortgeht unter einem Winkel Θ mit dem Primärstrahl, andererseits sei der Winkel, unter dem das Elektron fortgeschleudert wird, ϑ. Beide Richtungen mögen mit dem Primärstrahl in einer Ebene liegen. Die Anwendung des Impulssatzes liefert dann zwei Gleichungen, eine für die Impulskomponenten in Richtung des Primärstrahles und eine für die Komponenten senkrecht dazu. Sie lauten

$$\frac{h\nu_0}{c} = \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}\cos\vartheta + \frac{h\nu}{c}\cos\Theta, \qquad (II)$$

$$0 = \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}\sin\vartheta + \frac{h\nu}{c}\sin\Theta, \qquad (III)$$

da bekanntlich eine Strahlungsenergie $u = h\nu$ einen Impuls u/c in ihrer Fortpflanzungsrichtung besitzt.

Eine Übersicht bekommt man am besten, indem man die folgenden dimensionslosen Größen einführt:

$$\mu = \frac{\nu}{\nu_0}, \qquad (3)$$

d. h. das Verhältnis der Sekundärfrequenz zur Primärfrequenz, und

$$x = \frac{mc^2}{h\nu_0}. \qquad (4)$$

Die Größe mc^2/h hat die Dimension einer Frequenz, welche mit N bezeichnet werden soll. Sie ergibt sich zahlenmäßig zu

$$N = 1{,}23 \cdot 10^{20}\,\frac{1}{\text{sec}},$$

entsprechend einer Wellenlänge

$$\lambda = 0{,}0243 \cdot 10^{-8}\ \text{cm}$$

und ist ihrer Definition nach universell.

Unter Einführung von μ und x nehmen die Grundgleichungen die Form an

$$1 - \mu = x\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right), \qquad (I')$$

$$1 - \mu\cos\Theta = x\,\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\cos\vartheta, \qquad (II')$$

$$-\mu\sin\Theta = x\,\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\sin\vartheta. \qquad (III')$$

Nach (4) entspricht $x = \infty$ der Primärfrequenz $\nu_0 = 0$ und $x = 0$ der Primärfrequenz $\nu_0 = \infty$.

Gibt es nun einen Sekundärstrahl in der Richtung Θ, so gestatten die drei Gleichungen (I'), (II'), (III') die Berechnung der drei Größen μ, β und ϑ. Bei gegebenem x, d. h. bei gegebener Wellenlänge der Primärstrahlung, folgt dann erstens aus μ nach (3) die Frequenz ν des Sekundärstrahls, zweitens aus β nach (1') die Geschwindigkeit v des sekundären Elektrons und drittens mit ϑ die Richtung, in der dieses Elektron fortgeschleudert wird.

3. Eine Übersicht über die Zusammenhänge gewinnt man etwa folgendermaßen. Aus (II') und (III') folgt durch Elimination von ϑ:

$$1 + \mu^2 - 2\mu\cos\Theta = x^2\,\frac{\beta^2}{1-\beta^2}$$

1) Über die Annahme „freier Elektronen" vgl. noch Abschnitt 4.

und durch Einsetzen des hieraus ableitbaren Wertes von $1-\beta^2$ aus (I')

$$1+\frac{1-\mu}{x}=\sqrt{1+\frac{1+\mu^2-2\mu\cos\Theta}{x^2}}.$$

Quadriert man diese Gleichung und setzt

$$1+\mu^2-2\mu\cos\Theta=(1-\mu)^2+2\mu(1-\cos\Theta),$$

so ergibt sich

$$1-\mu=\frac{\mu}{x}(1-\cos\Theta)$$

oder

$$\mu=\frac{1}{1+\frac{1}{x}(1-\cos\Theta)}=\frac{1}{1+\frac{2}{x}\sin^2\frac{\Theta}{2}}. \quad (5)$$

Da $\mu=\frac{\nu}{\nu_0}$, so besagt (5), daß die Frequenz der Sekundärstrahlung stets kleiner ist als die Primärfrequenz, ausgenommen der Fall, daß der Sekundärstrahl die Fortsetzung des Primärstrahls bildet. Im übrigen wird die Verkleinerung der Frequenz umso erheblicher, je kleiner x ist, d. h. nach (4) je kleiner die Wellenlänge der Primärstrahlung ist. Der Effekt wird aber erst dann stark, wenn die primäre Wellenlänge λ vergleichbar mit oder kleiner als die universelle Wellenlänge Λ ist.

Die rechte Seite von (I') ist das Verhältnis der Energie des fortgeschleuderten Elektrons

$$E=mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)$$

zu der Energie des primären Quantums $h\nu_0$. Unter Benutzung von (5) folgt demnach

$$\frac{E}{h\nu_0}=x\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)=1-\mu=\frac{\frac{2}{x}\sin^2\frac{\Theta}{2}}{1+\frac{2}{x}\sin^2\frac{\Theta}{2}} \quad (6)$$

eine Formel, welche ohne weiteres die Energie des Sekundärelektrons liefert in Abhängigkeit von der Richtung des zugehörigen sekundären Röntgenstrahls. Bildet dieser Strahl die Fortsetzung des Primärstrahls ($\Theta=0$), so ist $E=0$; läuft er entgegengesetzt ($\Theta=\pi$), so ist E maximal, nämlich

$$E=\frac{1}{1+\frac{x}{2}}.$$

Je kleiner x, d. h. je kleiner die Wellenlänge des Primärstrahls, umso größer ist der Bruchteil des primären Strahlungsquantums, welcher sich im Elektronenstrahl wiederfindet, so daß sich mit abnehmender Wellenlänge eine immer größere Bevorzugung der Elektronenenergie vor der sekundären Strahlungsenergie einstellt.

Schließlich muß noch die Richtung der Geschwindigkeit des ausgelösten Elektrons bestimmt werden. Dividiert man (III') durch (II'), so kommt zunächst

$$\operatorname{tg}\vartheta=-\frac{\mu\sin\Theta}{1-\mu\cos\Theta},$$

wofür aber mit Rücksicht auf (5) auch geschrieben werden kann

$$\operatorname{tg}\vartheta=-\frac{x}{1+x}\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}}. \quad (7)$$

Geht Θ von 0 bis π, so durchläuft die rechte Seite von (7) alle Werte von $-\infty$ bis 0. Da ϑ auf das Gebiet zwischen 0 und π beschränkt ist, so geht dieser Winkel gleichzeitig von $\pi/2$ bis π. Nun ist durch (6) nur β^2 und nicht β selbst bestimmt, so daß die Wahl des Vorzeichens noch frei steht. Sollen aber mit Werten von ϑ zwischen $\pi/2$ und π die Gleichungen (II') und (III') einzeln erfüllt werden, so wird dadurch die Wahl des negativen Zeichens für β bedingt. Das bedeutet, daß die Elektronen stets nach vorn geschleudert werden. Weicht aber die Richtung der sekundären Strahlung nach oben vom Primärstrahl ab, letzterer horizontal verlaufend gedacht, so fliegt das Elektron nach unten. Für lange Primärwellen (x groß) wird in der Grenze

$$\operatorname{tg}\vartheta=-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}},$$

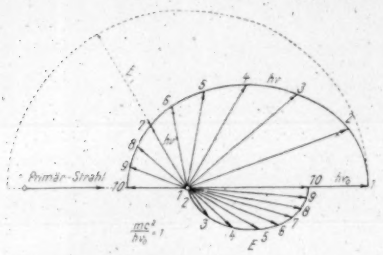
somit einfach

$$\vartheta=\frac{\pi}{2}+\frac{\Theta}{2}.$$

Je kleiner aber die primäre Wellenlänge wird, umso kleiner wird der Faktor $\frac{x}{1+x}$; außer für kleine Werte von Θ ist also dann die rechte Seite von (7) dauernd klein, d. h. ϑ stets nahe gleich π. Bei sehr harter Primärstrahlung werden also die Elektronen vorwiegend ungefähr in Richtung des Primärstrahls fortgeschleudert. In Fig. 1 sind die theoretischen Verhältnisse dargestellt für den Fall $x=1$, d. h. für

$$\lambda_0=\Lambda=0{,}0243\cdot 10^{-8}\,\text{cm}.$$

Die obere Hälfte der Figur zeigt einen gestrichelten Halbkreis mit dem Radius $h\nu_0$, außerdem sind eine Reihe von Pfeilen gezeichnet, begrenzt durch eine ausgezogene Kurve. Die Länge derselben gibt die Größe des sekundären



Strahlungsquantums $h\nu$ an, gemäß (5)[1]. Das Stück vom Radius zwischen dieser Kurve und dem Kreis gibt den jeweiligen Absolutwert der Energie E des Elektrons, da $h\nu$ und E sich gemäß dem Energiesatz (vgl. (6)) zu $h\nu_0$ ergänzen müssen. Die untere Hälfte der Figur enthält eine Reihe von Pfeilen, ebenfalls durch eine ausgezogene Kurve begrenzt. Diese Pfeile stellen durch ihre Länge den jeweiligen Betrag der Elektronenenergie E dar und weisen in Richtung der Geschwindigkeit des Elektrons. Sowohl die Pfeile des Strahlenquantums $h\nu$, wie die Pfeile für E sind numeriert, so daß zusammengehörige mit der gleichen Nummer versehen sind. Ihre Richtung ist nach (7) berechnet. Man sieht, wie die untern Pfeile auf einem Winkelbereich von 90° beschränkt bleiben, während die Richtung des sekundären Strahlungsquantums einen Bereich von 180° überstreicht.

4. Die unter **3** angegebenen Folgerungen decken sich qualitativ mit dem ersten, zweiten und letzten der eingangs hervorgehobenen Punkte. Früher schien mir die geforderte Frequenzänderung zu groß, verlangt doch (5) etwa bei einer Primärwellenlänge $\lambda_0 = 0{,}708$ Å und unter einem Beobachtungswinkel von 90° schon ein Frequenzverhältnis

$$\mu = \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cong 1 - \frac{1}{x} + \ldots = 1 - 0{,}0330.$$

Nun gibt aber Compton[2]) an durch direkte Beobachtung bei $\lambda_0 = 0{,}708$ (Molybdän K_α) an der Streustrahlung von Graphit unter 90° gegen den Primärstrahl eine Wellenlängenvergrößerung von 3,4 Proz. festgestellt zu haben. Das deckt sich mit dem berechneten Werte von μ. Im übrigen führt er selber zur Berechnung dieses Effektes die Formel an

$$\frac{\nu}{\nu_0} = 1 - \frac{h}{mc\lambda_0},$$

von welcher er berichtet, daß sie auf Grund des Dopplerprinzips erschlossen werden kann; sie deckt sich mit der oben für $\mu = \frac{\nu}{\nu_0}$ angegebenen Entwicklung. Auch jetzt noch ist aber die Frage nicht geklärt, ob und wie sich diese Frequenzänderung äußert bei der Kristallreflexion, ob insbesondere die Winkel aufeinander folgender Reflexionen steigender Ordnung etwas von jenem Effekte erkennen lassen.

Die Gesamtheit der Messungen über Kristallreflexion macht den Eindruck, als ob von der in Frage stehenden Frequenzänderung nichts zu bemerken ist. Es wird somit von wesentlichem Interesse die Comptonsche Beobachtung mit jenen Messungen zu konfrontieren und festzustellen, ob hier tatsächlich zwei ganz verschiedene Effekte vorliegen.

Die Orientierung der vorhergehenden Überlegungen gegenüber dem bekannten Einsteinschen Ansatze für den lichtelektrischen Effekt

$$E = h\nu_0$$

ist ebenfalls von Interesse. Dieser Ansatz ist für einen Prozeß zwischen der Strahlung und einem einzelnen freien Elektron nicht anwendbar. Wäre nämlich im Sinne dieser Gleichung ein etwa in Richtung des Primärstrahls fortgeschleudertes Elektron entstanden auf Kosten der Strahlungsenergie $h\nu_0$, und wäre kein sonstiger Effekt vorhanden, so hätte man (bei konstanter Masse m)

$$\frac{mv^2}{2} = h\nu_0,$$

d. h. es wäre ein Impuls erzeugt im Betrage

$$mv = \sqrt{2mh\nu_0}.$$

Dafür wäre mit der Strahlung der Impuls

$$\frac{h\nu_0}{c}$$

verschwunden. Diese beiden Beträge kompensieren sich im allgemeinen durchaus nicht. Für Lichtwellen und nicht sehr harte Röntgenstrahlen wäre der erzeugte Impuls größer als der verschwundene. Man hätte also einen Widerspruch mit dem Impulssatz. Die Einsteinsche Gleichung ist aber in jenen Gebieten praktisch zutreffend, man muß also schließen, daß die Verbindung des Elektrons mit dem Atom hier eine Rolle spielt. Infolge dieser Bindung kann auch der Atomrumpf Impuls aufnehmen und dann ist eine Kompensation möglich; der kleine

1) Wie (5) zeigt, ist die Kurve eine Ellipse, in deren linken Brennpunkt das Strahlungszentrum liegt. Die horizontale und vertikale Halbachse sind bzw.

$$a = h\nu_0 \frac{x+1}{x+2} \text{ und } b = h\nu_0 \sqrt{\frac{x}{x+2}},$$

der Mittelpunkt der Ellipse ist um $\frac{h\nu_0}{1+x}$ vom Strahlungszentrum entfernt.

2) l. c. S. 19.

mit der Strahlung verschwundene Impuls $\frac{h\nu_0}{c}$ erscheint als Differenz der in entgegengesetzter Richtung gerichteten Impulse von Elektron und Atomrumpf, ohne daß die Energie des Elektrons merklich unter $h\nu_0$ zu sinken braucht. Bei völlig freiem Elektron wurde die Kompensation oben erreicht durch die gleichzeitige Aussendung einer sekundären Nadelstrahlung. In diesem Falle findet, wie (6) zeigt, eine gänzliche Übertragung des Strahlungsquantums auf das Elektron nur in der Grenze für unendlich kleine Wellenlänge statt. Es sprechen nun Anzeichen dafür, daß der gewöhnliche lichtelektrische Effekt im Sinne von Einstein, bei dem die inneren Kräfte im Atom, wie eben gezeigt, von mitbestimmendem Einfluß sind, mit abnehmender Wellenlänge der Primärstrahlung immer mehr durch einen Effekt der oben besprochenen Art ersetzt wird, bei dem das Elektron angenähert frei ist und die inneren Kräfte keine Rolle mehr spielen. Dabei sollte dieser Übergang bei umso größerer Wellenlänge auftreten, je kleiner das Atomgewicht des bestrahlten Körpers ist, da mit abnehmendem Atomgewicht auch die Kräfte im Innern des Atoms kleiner werden.

5. Das dritte der eingangs hervorgehobenen Versuchsergebnisse ist bisher noch nicht zur Sprache gekommen. Im Sinne der bisherigen Quantentheorie kann diese Intensitätsfrage nur gelöst werden durch eine Angabe über die Wahrscheinlichkeit eines Einzelprozesses. In unserm Falle ist die Wahrscheinlichkeit dafür anzugeben, daß bei gegebener Intensität i der Primärstrahlung ein Sekundärstrahl entsteht, welcher in einem Raumwinkelbereich $d\Omega$ zeigt, dessen Mittellinie mit der Primärrichtung einen Winkel Θ einschließt. Stützt man sich nun auf das Korrespondenzprinzip, d. h. verlangt man, daß in der Grenze für lange Wellen die Ergebnisse der Elektrodynamik Gültigkeit besitzen, dann muß für jene Wahrscheinlichkeit der Ansatz gelten

$$\text{const.}\, i\, \frac{1+\cos^2\Theta}{2}\, d\Omega,$$

wobei const. die Konstante der Thomsonschen Formel ist.

Auf dem Gebiete der Optik hat Bohr sich damit beholfen, daß er postulierte: der für unendlich lange Wellen gültige Wahrscheinlichkeitsansatz soll auch noch mit genügender Genauigkeit im optischen Gebiete gelten. Tut man das auch hier, dann wird nach (5) die zerstreute Energie eines Elektrons proportional

$$\int_0^\pi \frac{1+\cos^2\Theta}{2}\, \frac{\sin\Theta d\Theta}{1+\frac{1}{x}(1-\cos\Theta)},$$

während sie in der Grenze für lange Wellen ($x=\infty$) proportional ist dem Integral:

$$\int_0^\pi \frac{1+\cos^2\Theta}{2}\sin\Theta d\Theta.$$

Das Verhältnis dieser beiden Integrale ist der Faktor f, mit dem der Grenzwert für die Zerstreuung multipliziert werden muß, um den wirklichen Wert bei einer beliebigen Wellenlänge λ_0 zu finden. Der Faktor f ist eine Funktion von

$$x=\frac{mc^2}{h\nu_0}=\frac{\lambda_0}{\Lambda}.$$

Die Ausrechnung ergibt

$$f(x)=\frac{3}{4}x^3\left\{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\left(1+\frac{3}{2}\frac{1}{x}\right)\right\}. \quad (8)$$

Für große Werte von x wird

$$f(x)=1-\frac{7}{16}\frac{1}{x}+\ldots;$$

für kleine Werte von x hat man

$$f(x)=\frac{3}{2}x\left[\ln\frac{1}{x}-\frac{3}{4}+\ldots\right].$$

Bei $\lambda_0=0$ ist also der Faktor $f=0$, er wächst dann mit steigender Wellenlänge und erreicht den Wert 1 bei $\lambda_0=\infty$. Die wesentliche Veränderlichkeit von f ist natürlich auf ein Gebiet konzentriert in der Umgebung von

$$\lambda_0=\Lambda=0{,}0234\ \text{Å}.$$

Die Theorie verlangt also tatsächlich eine unter dem elektrodynamischen Grenzwerte bis auf 0 herabsinkende Zerstreuung. Es muß aber bemerkt werden, daß die Verminderung der Zerstreuung in dieser Darstellung Hand in Hand geht mit einer gleichzeitig stattfindenden Vermehrung der Elektronenenergie, so zwar, daß beide Effekte zusammen bei jeder Wellenlänge im Energiebetrage dem elektrodynamischen Grenzwerte entsprechen. Wird einwandfrei festgestellt, daß auch der Gesamtbetrag Streustrahlung und Elektronenenergie bei harten Strahlen unter jenem Grenzwerte sinkt, dann wäre das mit Rücksicht auf die Verbesserung der beim Korrespondenzprinzip angewandten Extrapolation (von $\lambda_0=\infty$ aus) von ganz besonderem Interesse, da auf diesem Gebiete noch große Unklarheit herrscht. Daß das Korrespondenzprinzip ähnlich benutzt werden kann, um auch in der Quantendarstellung die Polari-

sationsverhältnisse zu beschreiben, sei nur kurz erwähnt.

Zum Schlusse möchte ich hervorheben, daß ich die vorstehenden Überlegungen nicht anders aufgefaßt wissen möchte, als ein Versuch aus den beiden Annahmen: „Quanten" und „Nadelstrahlung" zunächst einmal möglichst detaillierte Schlüsse zu ziehen unter alleiniger Benutzung möglichst allgemeiner Gesetze: „Energiesatz" und „Impulssatz". Imdem nun an Hand der Erfahrung charakteristische Abweichungen von jenem Schema aufgedeckt werden, dürfen wir vielleicht hoffen, einen tieferen Einblick in die Quantengesetze zu erlangen, insbesondere was ihren Zusammenhang mit der Wellenoptik betrifft.

Zürich, 10. März 1923.

(Eingegangen 14. März 1923.)

Saitenelektrometer neuer Form.

Von C. W. Lutz.

Das Saitenprinzip hat sich in der elektrischen Meßtechnik so bewährt, daß es sich wohl verlohnt, seine konstruktive Durchführung weiterhin zu verbessern und zu vereinfachen. Nach zahlreichen Versuchen und Prüfung verschiedener Probekonstruktionen, welch letztere die Firma Edelmann in München in entgegenkommender Weise nach meinen Wünschen ausführte, ist schließlich eine neue Form des Saitenelektrometers[1]) entstanden, die folgende Neuerungen aufweist.

Die Saite ist nicht wie bei der älteren Form an beiden Enden starr festgehalten, sondern an einem Ende nachgiebig und elastisch befestigt. Diese Befestigungsart wurde schon von Ader[2]) bei seinem Saitengalvanometer, von J. Elster und H. Geitel[3]) sowie von Th. Wulf[4]) in verschiedenen Ausführungen bei ihren bekannten Fadenelektrometern verwendet. Die Eigentümlichkeit meiner Anordnung besteht darin, daß die Saite, genau so wie früher, in einer leicht löslichen Verbindung mit dem Elektrometer steht und zusammen mit der elastischen Befestigung herausgenommen werden kann. Das Auswechseln der Saiten kann daher der Beobachter jederzeit selbst besorgen und braucht nicht erst das ganze Instrument zu diesem Zwecke dem Fabrikanten einzuschicken. Das ist gewiß von Vorteil; denn dadurch läßt sich eine zerrissene Saite sogleich durch eine neue aus einem Vorrat ersetzen. Auch kann die unbeschädigte Saite, wenn erwünscht, vorübergehend aus dem Elektrometer entfernt werden, um etwa den oberen Isolator gründlich zu reinigen, oder um dafür Saiten aus anderem Material oder von anderer Dicke einzusetzen. Auf Reisen lassen sich Ersatzsaiten mitführen, so daß ein Schaden sofort an Ort und Stelle behoben werden kann.

Des weiteren wurden noch folgende hauptsächliche Verbesserungen durchgeführt. Jede Schneide ist für sich in weiten Grenzen mikrometrisch verstellbar, eine Anordnung, die ich schon beim ersten Modell meines Saitenelektrometers[1]) verwendete. Alle Zuleitungsklemmen sind am Kopfe des Instrumentes angeordnet, so daß sich die verschiedenen Schaltungen durch kurze Drähte einfach und übersichtlich ausführen lassen. Die Mikrometerschraube zur Regulierung der Saitenspannung ist ebenfalls oben angebracht, sie steht bequem zur Hand, ihre Teilung sieht nach vorne und ist daher gut ablesbar. Das Innere des Instrumentes ist leicht zugänglich, wodurch etwaige Störungen erkannt und behoben werden können. Endlich wurden besondere Vorkehrungen zur Unterdrückung von störenden Temperatureinflüssen getroffen. Durch die Gesamtheit dieser konstruktiven Änderungen konnte die Handhabung des Elektrometers vereinfacht, seine Empfindlichkeit vergrößert, sein Meßbereich erweitert und seine Kapazität noch mehr herabgedrückt werden, wie aus den folgenden Darlegungen ersichtlich wird.

Saitenmaterial.

Nach meinen Erfahrungen eignet sich für Elektrometersaiten Platin am besten.

Metallisierte Quarzsaiten sind wohl leichter und darum etwas besser gedämpft, aber viel weniger dauerhaft. Auch haben sie keine ganz glatte Oberfläche, wodurch die Schärfe der Ablesung beeinträchtigt wird. Bei raschen Bewegungen wird der metallische Überzug mechanisch zerstört; aber auch ganz von selbst verlieren versilberte Quarzsaiten mit der Zeit ihre Leitfähigkeit, ein Mangel, über den schon öfters geklagt wurde[2]). Es rührt dies wahrscheinlich von einer allmählichen Sinterung der feinsten

1) C. W. Lutz, diese Zeitschr. **9**, 100 u. 642, 1908; **13**, 954, 1912.

2) Ader, Compt. rend. **124**, 1440, 1897; Elektrotechn. Zeitschr. **18**, 561, 1897 (Ref. mit Abb.).

3) J. Elster u. H. Geitel, diese Zeitschr. **10**, 664, 1909.

4) Th. Wulf, diese Zeitschr. **15**, 250, 1914.

1) C. W. Lutz, Sitzungsber. d. bayr. Akad. d. Wiss. (math.-phys. Kl.) **37**, 61, 1907.

2) M. Gildemeister, Zeitschr. f. biolog. Technik u. Methodik **3**, 51, 1915. Auch die Firma Edelmann hat die gleichen Erfahrungen gemacht.

amorphen Metallteilchen her, wie V. Kohlschütter[1]) am Spiegelsilber nachwies.

Aluminiumsaiten genügender Länge und Feinheit sind schwer herzustellen und wenig haltbar.

Dagegen sind Platindrähte von ca. 2 μ Dicke ganz vorzüglich geeignet. Bei nur einigermaßen vorsichtiger Behandlung, wozu im folgenden noch Anleitung gegeben wird, sind sie von unbegrenzter Haltbarkeit. Die Dämpfung solch dünner Saiten ist bei mäßiger Spannung völlig aperiodisch. Bei solchen Registrierungen, wo es gerade darauf ankommt, läßt sich durch entsprechende Wahl der Hilfsladung oder des Schneidenabstandes immer erreichen, daß jede gewünschte Empfindlichkeit bei mäßig gespannter und damit aperiodisch gedämpfter Saite zustande kommt. In den meisten Fällen und besonders bei Augenablesung kommt aber die kaum merklich geringere Dämpfung der Platinsaite gar nicht in Betracht, denn die Einstellung erfolgt immer rasch, nicht zu nahe der labilen Lage sogar augenblicklich. Aus diesen Gründen verwende ich für das nachstehend beschriebene Elektrometer ausschließlich Platinsaiten von ca. 2 μ Dicke und 6 cm Länge; jedoch können jederzeit auch Saiten aus anderem Material eingesetzt werden.

Beschreibung des Elektrometers.

Das Prinzip ist dasselbe geblieben. In einem elektrischen Felde zwischen 2 schneidenförmigen Elektroden ist ein sehr dünner Metalldraht, die Saite, isoliert ausgespannt. Die Durchbiegung dieses Drahtes durch die elektrischen Kräfte wird mit dem Mikroskop abgemessen.

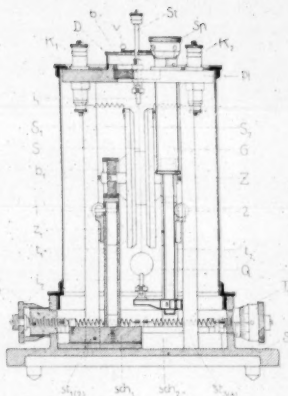


Fig. 1.

Fig. 1 zeigt das Saitenelektrometer im Längsschnitt, Fig. 2 in photographischer Ansicht. Es besteht im wesentlichen aus zwei Teilen, einem äußeren Teil, dem zylindrischen Gehäuse Z mit Mikroskop M sowie Beleuchtungsspiegel B (Fig. 2) und einem inneren Teil, der sich auf

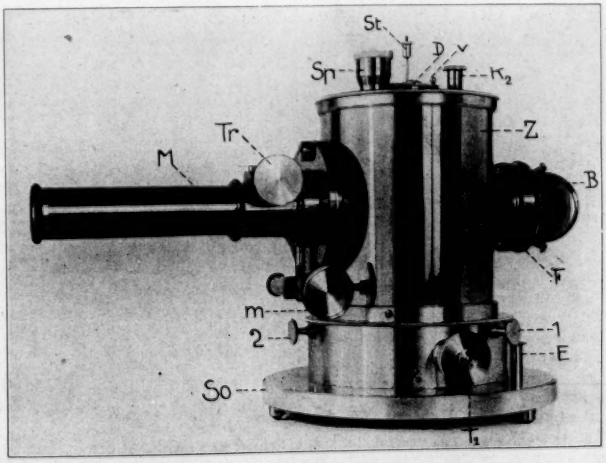


Fig. 2.

1) V. Kohlschütter, Liebigs Ann. d. Chem. 387, 141, 1912.

dem schalenförmigen Sockel So aufbaut. Nach Abschrauben des Mikroskopes und Entfernung der 3 Befestigungsschrauben 1, 2, 3 (3 ist in Fig. 2 nicht sichtbar) läßt sich das Gehäuse nach oben abziehen, so daß das Innere des Instrumentes von allen Seiten her frei zugänglich wird.

Am Grunde des Sockels So aus Magnalium (Fig. 1) sind 4 kräftige Stahlstützen $st_1 \cdots st_4$ befestigt, die oben eine runde Platte Pl, ebenfalls aus Magnalium tragen. In der Mitte dieser Platte ist die Bernsteinscheibe b eingelassen, welche den oberen Befestigungsstift i_1 der Saite S trägt und elektrisch isoliert. Das untere Saitenende ist an der isolierten Quarzdrahtschleife Q befestigt, die in einem Stift i_2 eingekittet ist, der von dem galgenförmigen Träger G (in Fig. 1 stark ausgezogen) gehalten wird. Durch Hineinschrauben der Spannschraube Sp kann der Träger G mikrometrisch verlängert und dadurch die Saite gespannt, durch Herausschrauben verkürzt und die Saite gelockert werden. Die elastische Quarzdrahtschleife ermöglicht ein sehr langsames und gleichmäßiges Anspannen der Saite. Erst nach über ein Dutzend vollen Trommelumdrehungen ist sie ganz gespannt. Ein Hubbegrenzer verhindert eine allzu starke Anspannung oder Lockerung. Die Teilung am Kopfe der Spannschraube läßt die Stärke der Saitenspannung ersehen und ermöglicht auch eine genaue Wiedereinstellung einer einmal gewählten Anspannung.

Links und rechts der Saite steht je eine Schneide S_1 und S_2, die in Bernsteinscheiben wie b_1 isoliert gelagert sind. Die brillenförmigen Fassungen der Bernsteinscheiben sind an den Trägern t_1 und t_2 befestigt, die auf 2 Schlitten sch_1 und sch_2 aufgeschraubt sind. Die beiden Mikrometerschrauben mit geteilten Trommeln T_1 und T_2 ermöglichen eine Feinverstellung jeder Schneide für sich von außen her. Der Abstand jeder Schneide von der Saite läßt sich an den Trommeln T_1 und T_2 auf $^1/_{10}$ mm genau ablesen. Aus später zu besprechenden Gründen ist der Hub der Schneiden durch Anschläge so begrenzt, daß sie nicht näher als auf 3 mm an die Saite heran und nicht weiter als bis 10 mm von ihr weg bewegt werden können. Um auch bei größten Saitenausschlägen stets scharfe Bilder im Mikroskop zu erhalten, läßt sich jede Schneide um einen Zapfen wie z_1 drehen, also parallel zu sich selbst nach vorwärts oder rückwärts aus der Mittelebene herausschwenken. Diese Drehung wird durch je ein Paar kleiner Fingerschrauben 1 und 2 (Fig. 1) besorgt, nachdem das Gehäuse abgenommen worden ist. In welchem Sinne gedreht werden muß, läßt sich unschwer aus der Verschiebung des Mikroskopes beurteilen, die zur Scharfeinstellung des bei großen Ausschlägen etwa unscharf gewordenen Saitenbildes nötig ist. Im allgemeinen ist ein Verschwenken der Schneiden nur nach Einziehen einer neuen Saite notwendig. Die Zuleitung zu den Schneiden geschieht durch 2 in Bernstein gefaßte, also isolierte Klemmen K_1 und K_2, die innen durch gelockte feine Drähte mit den Schneiden verbunden sind.

Zur Aufladung der Saite dient die Stecksonde St, die frei durch ein Loch des Staubdeckels D hindurchgeht. Bei Nichtgebrauch des Elektrometers wird die Sonde abgezogen und die Öffnung im Deckel durch den kleinen Vorreiber v verschlossen, um ein Verstauben des oberen Isolators zu verhindern. Schwerere Körper, wie Kondensatorplatten, Zerstreuungskörper usw. können auch anstatt aufgesteckt auf das vorragende 4 mm-Gewinde der oberen Saitenbefestigung aufgeschraubt werden. An Stelle des Staubdeckels D kann dann das Gehäuse irgendeines Apparates oder ein Metallrohr zwecks elektrostatischen Schutzes einer längeren Zuleitung aufgeschraubt werden. Mit Klemme E wird geerdet.

Um Wärmeeinflüsse möglichst unschädlich zu machen, sind verschiedene Vorkehrungen getroffen. Der Träger G der unteren Saitenbefestigung (Fig. 1) ragt frei von der Deckplatte Pl herab, damit seine geradlinige Längenänderung infolge Temperaturschwankungen nirgends durch Reibung behindert wird. Zum Zwecke der Temperaturkompensation ist sein unterer Teil aus Nickelstahl gefertigt. Um störende Wirkungen der Wärmestrahlung zu unterdrücken, ist das zylindrische Gehäuse Z außen vernickelt und liegt nirgends an der Deckplatte Pl an. Durch ein elastisches Zwischenmittel unter dem oben übergreifenden Rand des Gehäuses Z ist trotzdem für einen völlig winddichten Abschluß gesorgt. Damit ist erreicht, daß durch Verzerrungen des Gehäuses infolge einseitiger Wärmebestrahlung keine Spannungen auf die inneren Teile des Instrumentes übertragen werden können, die erfahrungsgemäß leicht Empfindlichkeitsänderungen verursachen.

Das Mikroskop M (Fig. 2) wird durch den Trieb Tr eingestellt und durch die Mikrometerschraube m seitlich verschoben. Im Okular sitzt das schon früher abgebildete Mikrometer[1]) mit doppelter Bezifferung, 50 Teile nach rechts und links, 100 Teile durchlaufend, dessen Längsstrich durch die ganze Teilung eine äußerst scharfe Ablesung des Saitenausschlages ermöglicht. Am geeignetsten erwies sich Zeiß-Optik und zwar, wenn es auf große Empfindlichkeit

1) Diese Zeitschr. 13, 957, 1912.

ankommt, das Achromatobjektiv A mit dem orthoskopischen Okular $f = 9$ mm (285fache Vergrößerung) und wenn besonders weiter Meßbereich nötig ist, zum selben Okular das Achromat aa oder a_3.

Das Elektrometer kann auch zum Projizieren und Registrieren verwendet werden, wobei gleich das Mikroskop selbst als Projektionskopf dient. Zur Beleuchtung beim Registrieren hat sich die von E. v. Angerer[1]) angegebene Vorrichtung, ein geradfadiges $3^1/_2$ Volt-Glühlämpchen mit Zeißschem Spezialobjektiv bewährt. Lämpchen und Objektiv sind in einer Zentrierdose gefaßt, die an Stelle des Spiegels B und des Verschlußfensters F an der Rückseite des Elektrometers eingesetzt werden kann.

Zum Herausnehmen oder Einziehen einer Saite dient die Edelmannsche Einziehklammer oder Einziehbüchse[2]). Das Elektrometer wird hierzu nach Entfernung des Gehäuses horizontal gelegt, die Schneiden ganz zurückgeschraubt und die Saite von rückwärts her eingeführt. Das Einziehen bietet keine besonderen Schwierigkeiten, zumal die elastische Quarzdrahtschleife selbst größere nicht beabsichtigte Zerrungen unschädlich macht.

Schaltungsweisen.

Das eben beschriebene Instrument läßt sich in verschiedenen Schaltungen verwenden, genau so wie das Quadrantelektrometer (R. Jaeger[3]) oder wie die eingangs erwähnten Einfadenelektrometer. Als Vorzug gegenüber der älteren Form erweist sich hier besonders die Verstellbarkeit jeder einzelnen Schneide für sich innerhalb weiter Grenzen. Da ich die verschiedenen Schaltungsmöglichkeiten bereits früher eingehend beschrieben habe, seien hier nur kurz die geeignetsten Schaltungen zusammengestellt und die dazu gehörigen Konstanten beigefügt.

A. Schaltungen ohne Hilfsladung.

1. Doppelschaltung. Die Saite wird mit einer Schneide leitend verbunden und beide zusammen auf das zu messende Potential aufgeladen. Die andere Schneide wird dauernd geerdet. Kleinste meßbare Spannung 1 Volt. Meßbereich bis ca. 1000 Volt. Kapazität 9 cm.

2. Influenzschaltung. Beide Schneiden werden dauernd geerdet. Das zu messende Potential wird an die isolierte Saite angelegt, die dadurch von der näher stehenden Schneide durch Influenz angezogen wird. Kleinste meßbare Spannung 2 Volt. Meßbereich bis ca. 1000 Volt. Kapazität im Minimum $1^1/_2$ cm. Durch Heranrücken der Schneiden vom größten zum kleinsten Abstand wächst die Kapazität um 3 Proz.

3. Differentialschaltung. Soll lediglich die Differenz zweier Potentiale gemessen werden, so wird das größere Potential an die Saite und die damit verbundene eine Schneide angelegt, das kleine an die isolierte andere Schneide.

Empfindlichkeit und Meßbereich lassen sich durch Änderung der Saitenspannung und des Schneidenabstandes in weiten Grenzen verändern, so daß mit diesen Schaltungen Potentiale von wenigen Volt bis ca. 1000 Volt gemessen werden können, wo die Selbstentladung dieser dünnen Saiten beginnt. Die Eichkurven haben eine flachgestreckte, bei mäßiger Saitenspannung größtenteils fast geradlinige Form.

Wird erst oberhalb einer bestimmten Potentialstufe eine möglichst große Empfindlichkeit gewünscht, etwa zur Messung des Sättigungsstromes, so verwendet man die Influenzschaltung und stellt beide Schneiden nahezu gleich weit von der Saite entfernt ein. Die Anfangsempfindlichkeit ist dann gering. Soll dagegen möglichst gleichmäßige Empfindlichkeit über die ganze Okularskala hinweg bestehen, so wird bei Influenzschaltung die eine Schneide weit abgerückt oder die Doppelschaltung verwendet.

Falls nicht mindestens eine Schneide näher an der Saite steht als das Objektiv A (ca. 9 mm), so wird die Saite bei größeren Ausschlägen zu diesem hingezogen. Die Saitenbilder werden dann unscharf und lassen sich auch durch Verschwenkung der Schneiden nicht mehr scharf bekommen. In diesem Falle muß ein Objektiv mit größerem freiem Objektabstand, etwa das Achromat aa oder a_3 verwendet werden.

Die angegebenen Kapazitätswerte gelten für das Elektrometer ohne Zuleitungssonde. Mit Staubdeckel und Sonde sind sie um ca. 1 cm größer. Wo kleine Kapazität verlangt wird, ist stets die Influenzschaltung zu wählen.

Hier sei gleich erwähnt, daß bei zu starker Aufladung des Elektrometers und großer Nähe der Schneiden die Saite an eine Schneide anspringen und wohl auch dort festkleben kann. Sie nimmt dadurch keinen Schaden, wenn nur dafür gesorgt ist, daß sie bei diesem Kurzschluß nicht durchschmilzt. Um das zu verhüten, muß bei Verwendung einer stromliefernden Batterie, etwa der zur Eichung und Hilfsladung sehr geeigneten kleinen Bornhäuser-Akkumulatoren (Akkumulatorenfabrik „Varta"), ein hoher Wider-

1) E. v. Angerer, Zeitschr. f. Instrumentenkunde **42**, 2, 1922.

2) M. Edelmann, diese Zeitschr. **7**, 117, 1906.

3) R. Jaeger, Zeitschr. f. Instrumentenkunde **37**, 5, 1917.

stand vorgeschaltet werden, am einfachsten ein Bleistiftstrich auf einem ca. 3 cm langen Hartgummileistchen. Die angeklebte Saite wird fast stets durch die Erschütterung und den Luftzug beim Öffnen des Gehäuses von selbst wieder frei. Bei hartnäckigem Kleben kann sie mit Hilfe einer einfachen Vorrichtung wieder losgemacht werden. Ein etwa 1 cm langes, dünnes und weiches Pinselhaar wird an ein Holzstäbchen, das als Griff dient, angeklebt. Mit der Spitze des Haares kann dann die Saite ganz gefahrlos von der Klebestelle weggezogen werden. Mit derselben Vorrichtung lassen sich auch Staubfasern, die sich zuweilen beim Öffnen des Gehäuses in staubigen Räumen an die Saite anhängen, leicht wieder entfernen.

B. Schaltungen mit Hilfsladung.

1. Saitenschaltung. Die Schneiden werden auf gleiche Abstände von der Saite eingestellt und mit einer Hilfsbatterie auf entgegengesetzt gleiches Potential[1]) geladen. Das zu messende Potential wird an die Saite angelegt. Durch Kommutieren des unbekannten Potentials oder der Hilfsladung läßt sich die Ablesegenauigkeit verdoppeln. Größte Empfindlichkeit 1 Skalenteil = 0,001 Volt. Meßbereich bei Proportionalität zwischen Potential und Saitenausschlag über die ganze Okularskala hinweg bis ca. 70 Volt. Kapazität $1^1/_2$ cm.

2. Schneidenschaltung. Die Hilfsladung wird an die Saite angelegt, eine der beiden gleich weit von der Saite abstehenden Schneiden dauernd geerdet, die andere auf das zu messende Potential geladen. Kommutieren wie oben. Empfindlichkeit und Meßbereich wie bei 1. Kapazität $7^1/_2$ cm.

3. Nullschaltung. Die Hilfsladung wird an die eine Schneide angelegt, die andere wird dauernd geerdet, ebenso zunächst auch die Saite. Es entsteht dadurch ein konstanter Ausschlag. Beim Auftreten einer Ladung an der Saite ändert sich dieser Ausschlag.

Auch bei diesen Schaltungen können Empfindlichkeit und Meßbereich durch verschiedene Wahl der Hilfsladung, der Schneidenabstände und der Saitenspannung in weitem Bereich verändert werden, so daß sich damit Potentiale von 0,001 Volt bis zu mehreren 100 Volt messen lassen. Wo kleine Kapazität erforderlich ist, empfiehlt sich besonders die Saitenschaltung.

Bei Verwendung von Hilfsladungen besteht anfänglich genaue Proportionalität zwischen Potential und Saitenausschlag. Nähert sich die Saite den Schneiden mehr und mehr, so wachsen die Ausschläge beschleunigt an und schließlich wird die Saite labil und springt zu einer Schneide hin. Damit nun der Bereich der Proportionalität zum mindesten die ganze Okularskala umfaßt, dürfen die Schneiden nicht zu nahe an die Saite herangeführt werden. Je größer die Hilfsladung und je kleiner die Saitenspannung ist, desto weiter müssen die Schneiden abstehen. So sollen sie bei $\pm$ 50 Volt Schneidenladung (Saitenschaltung) mindestens je 4 mm von der Saite entfernt sein. Durch Entspannung der Saite kann dann die Empfindlichkeit bis auf 1 Skalenteil = 0,003 Volt gesteigert werden. Bei $\pm$ 150 Volt Hilfsladung sollen die Schneidenabstände mindestens je 7 mm betragen, wobei sich noch eine Höchstempfindlichkeit von 1 Skalenteil = 0,001 Volt erreichen läßt. Größere Hilfsladungen standen mir nicht zur Verfügung. Wahrscheinlich ließe sich durch weitere Erhöhung der Hilfspotentiale die Empfindlichkeit noch etwas steigern. Ein besonderer elektrostatischer Schutz ist selbst bei den größten Empfindlichkeiten nicht nötig.

Bei kleinen Hilfsladungen lassen sich auch höhere Potentiale nach Größe und Vorzeichen messen. So können bei $\pm$ 10 Volt Schneidenladung Potentiale bis ca. 70 Volt gemessen werden, wobei noch über den ganzen Okularmaßstab hinweg Proportionalität zwischen Potential und Saitenausschlag besteht. Verzichtet man darauf, so lassen sich durch stärkere Anspannung der Saite oder weitere Verminderung der Hilfsladung Potentiale von mehreren 100 Volt messen. In diesem Falle muß eine vollständige Eichkurve aufgenommen werden. Bei sehr schwachen elektrischen Feldern (unter $\pm$ 10 Volt Schneidenladung) und großen Schneidenabständen ist auch hier ein Objektiv mit größerem freiem Objektabstand zu nehmen.

Der gesamte Meßbereich des Elektrometers erstreckt sich also über 6 Zehnerpotenzen.

Das Instrument wird von der Firma M. Th. Edelmann in München hergestellt.

München, Erdphysikalische Warte b. d. Sternwarte.

(Eingegangen 25. März 1923.)

1) Über die genaue Halbierung einer Hilfsladung siehe F. Kohlrausch, Lehrbuch d. prakt. Physik, 11. Aufl., 1910, S. 592.

Das Verhalten von langsamen Elektronen in Edelgasen.

Von F. Zwicky.

Das Verhalten von langsamen freien Elektronen gegenüber Gasatomen ist in einigen schönen experimentellen Arbeiten besonders von J. S. Townsend[1]), L. B. Loeb[2]), H. F. Mayer[3]), C. Ramsauer[4]) und G. Hertz[5]) geklärt worden. Für die gefundenen Resultate wird im folgenden eine theoretische Deutung gegeben, und zwar vorläufig mit Beschränkung auf Edelgase, d. h. ohne Berücksichtigung der Elektronenaffinität. Wir halten uns wesentlich an die Versuche von C. Ramsauer, bei welchen im Prinzip etwa folgendes gemessen wird. Man denke sich einen Raum, begrenzt von zwei parallelen Platten, welche zwei gleiche Bohrungen tragen, deren Verbindungslinie senkrecht zu den Platten steht (siehe Fig. 1). Man schießt nun einmal Elektronen durch die beiden Blenden, wenn im Zwischenraum ein Vakuum vorhanden ist, ein anderes Mal bei einer bestimmten Gasfüllung desselben. Im zweiten Falle wird der Bruchteil der hinter der zweiten Blende aufgefangenen Elektronen zu der Anzahl, welche die vordere Blende passierten, kleiner sein als im ersten Falle. Die experimentelle Anordnung ist bei Ramsauer so getroffen, daß man nur Elektronen einer bestimmten Geschwindigkeit durchschießt und das Verhältnis der durch beide Blenden durchgegangenen Elektronen mit und ohne Gasfüllung bestimmt. Als Wirkungsquerschnitt q der Moleküle bezeichnet man folgendes. Man denkt sich die vorhandenen wirklichen Moleküle ersetzt durch gleich viele ruhende starre Kugeln, die aber kein Kraftfeld um sich herum besitzen sollen. Diese Kugeln wählt man so groß, daß sie aus dem durch die Blenden begrenzten Elektronenstrahl gleich viele Elektronen aussondern wie die wirklichen Moleküle. Ihr Querschnitt ist dann der sogenannte „Wirkungsquerschnitt q" der letzteren. Dieses q ist nun als Funktion der Elektronengeschwindigkeit v gemessen worden. Für Edelgase hat sich ergeben, daß bei großen v ungefähre Übereinstimmung zwischen q und dem gaskinetischen Querschnitt besteht. Dies gilt für v-Werte, die etwa einer durchlaufenen Spannung von 40 Volt entsprechen. Bei noch größeren Geschwindigkeiten würde wohl q kleiner werden, da die Elektronen dann durch die Atome fahren, wobei diese eventuell zertrümmert werden können. Dieses Gebiet fällt aber außerhalb des Bereiches unserer Betrachtung. Mit abnehmender Geschwindigkeit nimmt q zu bis zu einem gewissen Maximum, um dann für noch kleinere v wieder zu kleineren Werten überzugehen, entsprechend den Kurven R der Fig. 2 u. 3, welche von Ramsauer gemessen worden sind. Argon macht insofern eine interessante Ausnahme, als bei ihm der Wirkungsquerschnitt für Geschwindigkeiten in der Nähe von 1 Volt sogar auf ungefähr den zehnten Teil des gaskinetischen sinkt.

Der Elementareffekt, den wir unseren Überlegungen zugrunde legen, ist die Ablenkung, die ein freies Elektron erfährt, wenn es an einem Gasatom vorbeifliegt. Vorausgesetzt, daß man den wirklichen Bau der Atome kennen würde, so wäre die Berechnung der genannten Ablenkung ein ganz bestimmtes Problem, dessen Behandlung nach allgemeinen Grundsätzen versucht werden könnte. Von einer derartigen Lösung der Aufgabe sind wir aber heute noch weit entfernt. Wir müssen uns begnügen, das Atom durch gewisse universelle Eigenschaften zu charakterisieren, die dann dem makroskopischen Verhalten der Substanzen quantitativ möglichst gut anzupassen sind. In diesem Sinne untersuchen wir die Ablenkung von Elektronen gegenüber folgenden Typen von Atomen, welche sukzessive bessere Näherungen an das wirkliche Verhalten bedeuten.

a) Die Atome wirken als starre Kugeln. In diesem Falle wird der oben definierte Wirkungsquerschnitt konstant, d. h. von der Geschwindigkeit der Elektronen unabhängig sein, solange diese bedeutend größer ist als die thermische Bewegung der Atome. Dies trifft bei den genannten Versuchen natürlich zu. Elektronen, welche eine Potentialdifferenz

$$V = 1 \text{ Volt} = \frac{1}{300}\, es$$

durchlaufen haben, besitzen bereits eine Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} = 1{,}5 \cdot 10^7 \text{ cm/sec}^{-1}$$

(Mit $e = 4{,}77 \cdot 10^{-10}\, es$ und $m = 0{,}9 \cdot 10^{-27}\, gr$ bezeichnen wir Ladung und Masse des Elektrons.) Die leichtesten Atome erreichen aber bei gewöhnlicher Temperatur höchstens eine solche von $2 \cdot 10^5 \text{ cm/sec}^{-1}$. Eine Abhängigkeit der freien Weglänge oder des Wirkungsquerschnitts von der Geschwindigkeit tritt also unter diesen Umständen nicht auf. Eine solche würde sich erst zeigen bei gleicher Größenordnung von Atom- und Elektronenbewegung. Der Fall

1) J. S. Townsend u. V. A. Bailey, Phil. Mag., Dec. 1921 u. March 1922.
2) L. B. Loeb, Phys. Review. 1922.
3) H. F. Mayer, Ann. d. Phys. **64**, 451, 1921.
4) C. Ramsauer, diese Zeitschr. **21**, 576, 1920 u. **22**, 613, 1921; Ann. d. Phys. **64**, 513, 1921.
5) G. Hertz, Proceedings of Amsterdam academy. 1922.

starrer Atome erfordert demnach keine weitere Diskussion.

b) Die Atome seien polarisierbar. Sie nehmen im elektrischen Feld $\mathfrak{E}$ ein elektrisches Moment von der Größe

$$\alpha\mathfrak{E}$$

an. Diese Annahme hat sich bekanntlich in der Theorie der Dielektrika bei den Dispersionserscheinungen und neuerdings bei der Behandlung der Probleme der Zustandsgleichung von Gasen sehr bewährt. In unserm Fall führt sie zu einem mit abnehmender Elektronengeschwindigkeit wachsenden Wirkungsquerschnitt.

c) Unter b haben wir so getan, als ob die nicht polarisierten Atome kein Feld um sich herum besäßen. Das ist natürlich nicht richtig, da sie aus einzelnen elektrischen Ladungen aufgebaut sind. Wir werden daher das Molekül jetzt als elektrisches System in gewohnter Weise als Dipol, Quadrupol usw. zu charakterisieren haben, wie es von der Behandlung der Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten und der Zustandsgleichung her bekannt ist. Bei Edelgasen spielt im allgemeinen der Quadrupol die Hauptrolle. Für einen solchen ergibt sich rein dimensionsmäßig als Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts q von der Elektronengeschwindigkeit v die Gleichung

$$q^3 v^4 = \text{const.}$$

d) Die in b und c behandelten Ablenkungen führen zu einem monotonen Anstieg von q mit kleiner werdendem v. Wir haben also die Wirkung eines Atoms auf ein freies Elektron noch nicht genügend genau erfaßt, um die Versuchsresultate darstellen zu können. Das rührt daher, daß wir das vom Atom erzeugte elektrische Feld als ein statisches betrachtet haben. In Wirklichkeit sind aber die Atome dynamische Systeme, welche in ihrer Umgebung Wechselfelder erzeugen. Es wird nun in diesem Abschnitt gezeigt, daß infolge der auftretenden Phasenbeziehungen zwischen der Geschwindigkeit des Elektrons und der Periode der Schwingungen im Feld, eine Verkleinerung der Ablenkungen mit abnehmenden v zustande kommen kann. Dieser Effekt ist bis zu einem gewissen Grade universell. Unter speziellen Voraussetzungen ist er aber auch imstande, die Sonderstellung von Argon in bezug auf den Wirkungsquerschnitt bei kleinen Elektronengeschwindigkeiten zu erklären.

Allgemein möchte ich noch bemerken, daß es auf Grund der hier gegebenen Ausführungen möglich scheint, die Versuchsergebnisse zu deuten, ohne annehmen zu müssen, daß Elektronen in das Innere der Gasatome eindringen. Überlegungen, welche von der letzteren Voraussetzung ausgehen, sind z. B. von F. Hund[1]) angestellt worden, haben aber bis jetzt zu keinem befriedigenden Resultat geführt.

Was die Quantentheorie anbetrifft, so haben wir von derselben bei unseren Betrachtungen keinen direkten Gebrauch gemacht. Das heißt aber nicht, daß sie dabei keine Rolle spielen könnte. Unsere Absicht ging dahin, mit den Gesetzen der klassischen Mechanik so weit als möglich zu gelangen. Wir haben also die Elektronenbahnen nach diesen Gesetzen bestimmt, eine Vorarbeit, die auf alle Fälle geleistet werden muß. Nach den Quantenregeln wären dann eventuell hinterher gewisse Gruppen von Bahnen auszuschließen. Doch werden wir davon in dieser Arbeit keinen Gebrauch machen.

Wir wollen noch kurz andeuten, wie man aus den Ablenkungen, die ein freies Elektron durch Gasatome erfährt, auf deren Wirkungsquerschnitt im Sinne der Einleitung schließt. In Fig. 1 seien B_1, B_2 die beiden rechteckigen Blenden. Ein Koordinatensystem (x, y, z) mit dem Nullpunkt o im Zentrum von B_2 habe die gezeichnete Lage. Ein Atom liege z. B. im Punkt

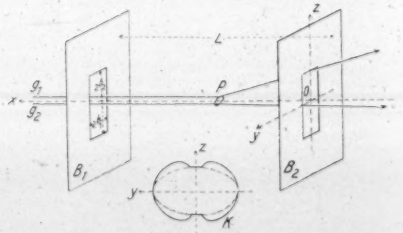


Fig. 1.

$P(x, 0, 0)$. Ein freies Elektron fliege auf einer Geraden $g \parallel x$ im Abstand a von x auf das Atom los, bei welchem es abgelenkt wird. Fährt das Elektron genügend nahe am Atom vorbei, so erfährt es nach unseren Vorstellungen so starke Ablenkungen, daß es die zweite Blende B_2 nicht mehr passieren kann. Den kritischen Wert von a, bei welchem das eintrifft, könnte man etwa als den Wirkungsradius bezeichnen, den das Atom in dieser Ebene (g, x) zeigt. Für verschiedene Ebenen (g, x) wird a, infolge der Unsymmetrie des Atomkraftfeldes, sowie der Blenden, verschiedene Werte annehmen. Im Falle polarisierbarer Moleküle kann a als Funktion der Richtung (in einer Ebene parallel y, z) streng berechnet werden. Man erhält so eine Kurve, wie sie in obiger Figur mit der Be-

1) F. Hund, Zeitschr. f. Phys. **13**, 241, 1923.

zeichnung K eingetragen ist und deren Fläche als Wirkungsquerschnitt q des Atoms in P anzusprechen ist. Zum experimentell bestimmten Wirkungsquerschnitt der Atome gelangt man nun leicht in folgender Weise. Experimentell wurde bei so kleinen Drucken gearbeitet, daß Mehrfachablenkungen nicht berücksichtigt zu werden brauchen. Das ist auch daraus ersichtlich, daß sich die (q, v)-Kurve als in weiten Grenzen vom Gasdruck unabhängig ergab. Wir erhalten also den gesuchten mittleren Wirkungsquerschnitt q, indem wir die q aller einzelnen in Frage kommenden Atome summieren und dann durch die Anzahl derselben dividieren. Bedeuten $2b_1$, $2b_2$ und L Breite, Höhe und Abstand der Blenden, so liegt das Atom mit gleicher Wahrscheinlichkeit in beliebigen Punkten des Parallelflachs

$$x = 0 - L, \quad y = -b_1 + b_1, \quad z = -b_2 + b_2.$$

Da unsere Mitteilung nur orientierenden Charakter hat, werden wir uns zwei Vereinfachungen erlauben. Einmal bilden wir den Mittelwert $\bar{q}$ so, daß wir annehmen, die Atome in einer Ebene $x = \text{const}$ verhalten sich wie diejenigen auf der x-Achse selbst. Dann werden wir auch die komplizierte Randkurve von q durch eine Ellipse ersetzen, deren beide Halbachsen mit den beiden extremsten Werten von a in der (x, y)- und der (x, z)-Ebene übereinstimmen. Den Fehler, den man dabei begeht, kann man leicht abschätzen. Er ist am größten an der Stelle $x = L$. In Fig. 1 ist gerade für diesen Fall ($2b_1 = 1$ mm, $2b_2 = 8$ mm, $L = 25$ mm) der Wirkungsquerschnitt K mit der entsprechenden Ellipse (punktiert) gezeichnet. An der Stelle $x = 0$ ist der Fehler null, da dann der Wirkungsquerschnitt (immer im Falle polarisierbarer Moleküle) ein Kreis ist. Daraus kann man schließen, daß der Gesamtfehler etwa 10 bis 20 Proz. betragen wird. Bei den Versuchen von Ramsauer liegen die Verhältnisse noch etwas komplizierter, indem die Elektronen infolge eines angelegten Magnetfeldes sich auf Kreisen bewegen. Für diesen Fall ist der Übergang von der Einzelablenkung zum experimentell gefundenen Wirkungsquerschnitt noch etwas verwickelter. Darauf gehen wir aber in dieser Arbeit nicht genauer ein, sondern benutzen die oben beschriebene Näherungsrechnung.

Wir gehen über zur quantitativen Fassung der einzelnen im vorigen angedeuteten Effekte.

§ 1. Polarisierbare Moleküle.

Das Gasmolekül nimmt im elektrischen Feld $\mathfrak{E}$ einen elektrischen Dipol von der Größe $\alpha\mathfrak{E}$ an. Seine potentielle Energie gegenüber dem Feld ist also gleich

$$-\frac{\alpha}{2}\mathfrak{E}^2,$$

wie man leicht ausrechnet. Liegt nun ein Gasmolekül im Abstand r von einem freien Elektron, so befindet es sich im Feld

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{r^2}.$$

Die gegenseitige Energie von Molekül und Elektron ist also

$$u = -\frac{\alpha}{2}\frac{e^2}{r^4}.$$

Die Kraft K auf das Elektron, welche die Richtung von r hat, ergibt sich durch Differentiation von u nach r

$$K_r = -\frac{\partial u}{\partial r} = -2\alpha\frac{e^2}{r^5}.$$

Was nun die Berechnung der Ablenkung eines am Molekül vorbeifahrenden Elektrons anbetrifft, so genügt es, dieselbe in erster Näherung durchzuführen, falls man nur auf einige Prozent genau rechnen will. Wie wir nachher noch streng beweisen wollen, ist es gerechtfertigt, bei kleinen Ablenkungen folgendermaßen zu verfahren. Das kräftefreie Elektron soll sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit v auf einer Geraden g bewegen, welche vom festliegenden Atom den senkrechten Abstand a habe. Wir bestimmen nun die Impulsänderung in einem Kraftfeld so, als ob am Elektron dieselben Kräfte angreifen, wie wenn es sich auch in diesem Fall noch geradlinig bewegen würde. Wir denken uns ein Koordinatensystem (o, X, Y, Z) so gelegt, daß der Nullpunkt o mit dem Atom zusammenfällt. Z schneide g normal, Y sei parallel g und X normal auf Y und Z. Wie leicht einzusehen ist, erfährt das Elektron eine Impulsänderung, die nur eine Komponente $m\dot{Z}$ in Richtung von Z besitzt. Dieselbe kann sofort aus der Bewegungsgleichung bestimmt werden. Es ist

$$m\ddot{Z} = K_z,$$

(Zeitliche Ableitungen bezeichnen wir durch übergesetzte Punkte.)

$$K_z = K_r \cos\beta = -2\alpha\frac{e^3}{r^5}\frac{a}{r},$$

wenn β der Winkel ist, den a mit dem Fahrstrahl r vom Atom zum Elektron bildet. Daraus folgt die ganze Geschwindigkeitsänderung in der Z-Richtung

$$[\dot{Z}]_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{K_z}{m}\,dt = -\frac{2\alpha e^2}{m}a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{r^6}.$$

Wählen wir den Nullpunkt der Zeit so, daß für $t = 0$ auch $\beta = 0$ ist, so wird

$$r^2 = a^2 + v^2 t^2,$$

$$[\dot{Z}] = -\frac{2\alpha e^2}{m} a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(a^2 + v^2 t^2)^3}.$$

Nach Auswertung des Integrals findet man

$$[\dot{Z}] = -\frac{3\pi\alpha e^2}{4 m a^4 v}.$$

Das ergibt für kleine $\Delta\varphi = \left|\frac{[\dot{z}]}{v}\right|$ den Ausdruck

$$\Delta\varphi = \frac{3\pi\alpha e^2}{4 m a^4 v^2}. \qquad (1)$$

Bei konstant gehaltenen Ablenkungswinkeln $\Delta\varphi$, d. h. bei gleichen Blendenverhältnissen stehen also a und v zueinander in der Beziehung

$$a^2 v = \text{const.}$$

Auf den Wirkungsquerschnitt umgedeutet, ergibt das den Zusammenhang

$$q v = \text{const.} \qquad (2)$$

Eine solche Hyperbel (H) haben wir in Fig. 2 neben der experimentell gefundenen Kurve von Ramsauer[1]) für Helium (R) eingetragen. Wie man sieht, wird der aufsteigende Ast dadurch gut wiedergegeben.

Fig. 2.

Statt der Geschwindigkeit v ist auf der Abszissenachse die dazu proportionale Wurzel aus derjenigen Voltzahl angegeben, die das Elektron durchlaufen müßte, um die Geschwindigkeit v zu erhalten.

Um zu prüfen, ob wir mit unseren Überlegungen auch quantitativ auf dem richtigen Wege sind, wollen wir durch Vergleich unseres Resultats mit den Versuchswerten bei Helium die Konstante α dieses Gases berechnen. Wir greifen auf die Fig. 1 zurück und berechnen zuerst die große Halbachse der Ellipse, durch welche wir nach den früheren Ausführungen den Wirkungsquerschnitt ersetzen. Ein Elektron, das in der (x, y)-Ebene an einem Atom bei $P\,(x, 0, 0)$ vorbeifährt, darf höchstens um

$$\Delta\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b_1}{x} \sim \frac{b_1}{x}$$

abgelenkt werden, falls es noch durch B_2 gelangen soll. Durch Vergleich mit (1) ergibt sich also für a_y näherungsweise

$$a_y = \sqrt[4]{\frac{3\pi\alpha e^2 x}{4 m v^2 b_1}}. \qquad (3)$$

Die zulässigen Ablenkungen in der (x, z)-Ebene lassen sich durch die Näherungsformel (1) nicht gut berechnen, da sie verhältnismäßig groß sind. Schon in der größten Entfernung $x = L = 25$ mm von B_2 ist für die z-Richtung die zulässige Ablenkung

$$\Delta\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b_2}{L} = \operatorname{arctg}\frac{4}{25}.$$

Die genaue Rechnung wird zeigen, daß der Wirkungsradius a_z bei $V = 16$ Volt ungefähr mit dem Radius a_0 der von den Elektronenbahnen ausgefüllten Kugel übereinstimmt, wenn wir den Querschnitt πa_0^2 derselben mit dem experimentell gefundenen Wirkungsquerschnitt bei großen v identifizieren. Überschlagsweise erhalten wir also

$$q = \pi a_0 a_y.$$

Da die Verteilung der Atome eine gleichmäßige ist, erhalten wir den gesuchten Mittelwert $\bar{q}$ des Wirkungsquerschnitts der zwischen B_1 und B_2 liegenden Moleküle nach der Formel

$$\bar{q} = \frac{\int_0^L q\,dx}{\int_0^L dx} = \frac{4}{5}\sqrt[4]{\frac{3\cdot\pi\cdot\alpha\cdot e^2\cdot L}{4\cdot m\cdot v^2\cdot b_1}}. \qquad (3a)$$

Aus (3a) wollen wir durch Einsetzen der experimentellen Daten die Konstante a für Helium berechnen. Es ist noch zu setzen

$$\frac{m v^2}{2} = eV.$$

Bei $V = 16$ Volt hat Ramsauer für den gesamten Wirkungsquerschnitt Q der Atome in 1 cm³ von 1 mm Hg gefunden

$$Q_{He} = 13\ \text{cm}^2/\text{cm}^3.$$

Daraus erhält man für $\bar{q}$, welches sich auf das einzelne Atom bezieht,

$$\bar{q} = \frac{760\cdot 22400}{N} Q,$$

wo $N = 6{,}06\cdot 10^{23}$ die Loschmidtsche Zahl bedeutet. Für den a_0 entsprechenden Querschnitt Q_0 entnimmt man der Fig. 2 den Wert

$$Q_0 \sim 7\ \text{cm}^2/\text{cm}^3,$$

woraus man findet

$$a_0 = 0{,}8\cdot 10^{-8}\ \text{cm}.$$

Mit Hilfe dieser Zahlen und den früher angegebenen Größen b_1, L usw. folgt aus Gleichung (3)

1) Die im folgenden benutzten Kurven von Helium und Argon sind der Arbeit von C. Ramsauer, diese Zeitschr. **22**, 614, 1921 entnommen. Q bedeutet wie dort den gesamten Wirkungsquerschnitt der Atome eines cm³-Gas bei 1 mm Hg-Druck.

$$a_{He} = 2{,}2 \cdot 10^{-25}.$$

Aus der Optik ist die Molekularrefraktion P_0 von Helium bekannt

$$P_0 = 0{,}52 \text{ cm}^{-3}.$$

Dabei ist

$$P_0 = \frac{4\pi}{3} N a.$$

Die Optik liefert demnach

$$a_{He} = 2{,}04 \cdot 10^{-25}.$$

Die Übereinstimmung der beiden, auf ganz verschiedenen Wegen gewonnenen Werte für a ist also eine sehr gute.

Bei Argon ist es nicht möglich, mit der bis jetzt ausgeführten Anschauung allein durchzukommen, wie im nächsten Paragraph gezeigt wird. q wächst hier mit abnehmendem v bedeutend stärker an, als das bei einer Hyperbel der Fall ist. Experimentell sind die Verhältnisse noch bei Neon untersucht. Dieses Gas zeigt aber ein so wenig ausgeprägtes Wachsen von q, daß wir dasselbe nicht gut mit der Theorie vergleichen können, um quantitative Schlüsse daraus zu ziehen. Immerhin ist zu bemerken, daß entsprechend dem größern Wert $a_{Ne} = 4{,}1 \cdot 10^{-25}$ das Anwachsen von q schon bei größeren v erfolgt, als bei Helium, wie es auch aus der Theorie folgt.

Um den Gültigkeitsbereich der Formel (1) streng abzugrenzen, geben wir jetzt noch die exakte Lösung des Problems. Die Herleitung derselben ist sehr einfach, wenn man die Bahnkurve in Polarkoordinaten r, φ berechnet. Das ablenkende Atom liege bei $r = 0$. s sei die Bogenlänge auf der Bahnkurve von einem willkürlichen Nullpunkt aus gemessen. Dann ist

$$ds^2 = r^2 d\varphi^2 + dr^2,$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v^2 = r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2.$$

Es gilt weiter der Flächensatz

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c.$$

Besitzt das Elektron in unendlicher Entfernung vom Atom die Geschwindigkeit $\mathfrak{v} = v_\infty$, so hat die Konstante c den Wert

$$c = a v_\infty.$$

a bedeutet wie immer den senkrechten Abstand, der vom Atom auf $\mathfrak{v}$ gefällt werden kann. Durch Kombination der gefundenen zwei Beziehungen folgt

$$v^2 = \frac{c^2}{r^2} + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \frac{c^2}{r^4}.$$

Wir benutzen noch den Energiesatz

$$m\frac{v^2}{2} + \Phi = \frac{m v_\infty^2}{2}.$$

Für die potentielle Energie stellten wir schon früher den Ausdruck

$$\Phi = -\frac{\alpha}{2}\frac{e^2}{r^4}$$

auf. Setzen wir Φ und v^2 in die Energiegleichung ein, so erhalten wir

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = r^4 \frac{v_\infty^2}{c^2} - r^2 + \frac{\alpha e^2}{m c^2},$$

oder, indem wir noch die Konstante c durch $a v_\infty$ ersetzen

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 &= \frac{1}{a^2}\left[r^4 - a^2 r^2 + \frac{\alpha e^2}{m v_\infty^2}\right], \\ &= \frac{1}{a^2}(r^2 - \varrho_0^2)(r^2 - \varrho_1^2).\end{aligned}\right| \quad (4)$$

Dabei sind ϱ_0 und ϱ_1 folgende Größen

$$\varrho_0^2 = \frac{a^2}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{\alpha e^2}{m v_\infty^2}},$$

$$\varrho_1^2 = \frac{a^2}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{\alpha e^2}{m v_\infty^2}}.$$

ϱ_0 ist der Radius einer Kreisbahn, auf welcher sich das Elektron mit der Gesamtenergie $m\frac{v_\infty^2}{2}$ um das Atom bewegen kann. ϱ_1 ist die Perihel-distanz der zweiten möglichen Bahn, welche zwei Asymptoten besitzt. Für den Fall, daß der Radikand in den obigen Formeln negativ wird, erhalten wir eine Spiralbahn, auf welcher das Elektron theoretisch gegen das Zentrum des Atoms hinfahren würde. Uns interessieren natürlich nur die Asymptotenbahnen. Der gesuchte Ablenkungswinkel ist gleich dem Winkel $\Delta\varphi$, den die beiden Asymptoten miteinander bilden. Es ergibt sich unmittelbar durch Integration aus Gleichung (4)

$$\pi + \Delta\varphi = 2a \int_{\varrho_1}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{(r^2 - \varrho_0^2)(r^2 - \varrho_1^2)}}.$$

Setzen wir $\frac{\varrho_1}{r} = z$, so wird

$$\pi + \Delta\varphi = \frac{2a}{\varrho_1} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = \frac{2a}{\varrho_1} K. \quad (5)$$

K ist ein vollständiges elliptisches Integral erster Gattung vom Modul

$$k = \frac{\varrho_0}{\varrho_1}.$$

Die Funktion K läßt sich nach dem Modul k in eine Reihe entwickeln

$$\frac{2}{\pi} K = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \ldots$$

Man verifiziert nun leicht, daß das früher ge-

gebene Resultat das erste Glied in dieser Entwicklung für $\Delta\varphi$ darstellt. Es ist nämlich

$$k^2 = \frac{a^2}{2} - \sqrt{\frac{a^4}{4} - \frac{\alpha e^2}{m v_\infty^2}},$$

$$\frac{a^2}{2} + \sqrt{\frac{a^4}{4} - \frac{\alpha e^2}{m v_\infty^2}},$$

$$k = [\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}],$$

wobei

$$\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m v_\infty^2 a^4}{\alpha e^2}}$$

gesetzt ist.

Drücken wir noch $\frac{a}{\varrho_1}$ in λ aus, so finden wir

$$\frac{a}{\varrho_1} = \sqrt{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Daraus folgt für $\Delta\varphi$ die Entwicklung

$$\Delta\varphi = \frac{3\pi}{16\lambda^2} + \frac{89\pi}{1024}\cdot\frac{1}{\lambda^4} \ldots,$$

oder in erster Näherung für große λ

$$\Delta\varphi = \frac{3\pi\alpha e^2}{4 m v^2 a^4},$$

also genau die schon früher abgeleitete Formel (1).

Bei großen Ablenkungen ist $\Delta\varphi$ aus der genauen Formel (5) mit Hilfe von Tafeln für das vollständige elliptische Integral K zu berechnen. Eine kleine Übersicht gibt folgende Tabelle, in welcher die gesuchten Größen $\Delta\varphi$ und

$$\lambda = \frac{a^2}{2}\sqrt{\frac{2V}{\alpha e}} \qquad (6)$$

für einige Werte des Moduls k angegeben sind.

Tabelle I.

arc sin k	k	$\lambda = \frac{k^2+1}{2k}$	K	$\Delta\varphi$	ctg $\Delta\varphi$
6°	0,1045	4,83	1,5751	1°17′	44,6
7°	0,1219	4,16	1,5767	1°57′	29,4
8°	0,1392	3,67	1,5785	2°42′	20,6
9°	0,1564	3,27	1,5805	3°19′	17,2
10°	0,1736	2,97	1,5828	4° 9′	13,7
15°	0,2588	2,06	1,5981	9°24′	6,1
20°	0,3420	1,63	1,6200	16° 2′	3,5
30°	0,5000	1,25	1,6858	36°47′	1,34
40°	0,6428	1,09	1,7868	60°12′	0,57
50°	0,7660	1,03	1,9356	116° 6′	—

Zur Berechnung des Wirkungsquerschnitts ist von dieser Tabelle folgender Gebrauch zu machen. Bei Helium erhält man z. B. mit dem optischen Wert $\alpha_{He} = 2{,}04 \cdot 10^{-25}$ und $V = 16$ Volt aus Gleichung (6) für den Wirkungsradius den Ausdruck

$$a = 0{,}78\sqrt{\lambda}\cdot 10^{-8}\,\text{cm}.$$

Nach früherem haben wir die beiden Extremwerte a_y, a_z zu bestimmen und über alle vorkommenden x zu mitteln. Wir müssen also den Mittelwert von $\sqrt{\lambda}$ über die Strecke $x = 0 \ldots L$ berechnen. Statt nach x zu integrieren, können wir das auch nach ctg $\Delta\varphi$ tun, das zu x proportional ist.

Es ist

$x = b_1 \operatorname{ctg}\Delta\varphi$ bei Berechnung von a_y,
bzw. $x = b_2 \operatorname{ctg}\Delta\varphi$ bei Berechnung von a_z.

Da $b_1 = \frac{1}{2}$ mm, $b_2 = 4$ mm, $L = 25$ mm, läuft ctg $\Delta\varphi$ im ersten Fall von 0 bis 50, im zweiten von 0 bis $\frac{4}{25}$ (siehe Fig. 1). Wird die Mittelwertsbildung auf Grund obiger Tabelle graphisch ausgeführt, so erhält man

$$\overline{\sqrt{\lambda}} = 1{,}24 \quad \text{in der } (x, z)\text{-Ebene},$$

$$\overline{\sqrt{\lambda}} = 1{,}877 \quad \text{in der } (x, y)\text{-Ebene},$$

Daraus folgt

$$\bar{a}_z = 0{,}78 \cdot 1{,}24 \cdot 10^{-8}\,\text{cm},$$
$$\bar{a}_y = 0{,}78 \cdot 1{,}88 \cdot 10^{-8}\,\text{cm},$$

oder der mittlere Wirkungsquerschnitt (Ellipse

$$\bar{q}_{He} = \pi \bar{a}_y \bar{a}_z = 4{,}45 \cdot 10^{-16}\,\text{cm}^2.$$

Aus der Ramsauerschen Kurve berechnet man für $V = 16$ Volt

$$\bar{q}_{He} = 3{,}65 \cdot 10^{-16}\,\text{cm}^2.$$

Die Übereinstimmung ist also befriedigend.

Wie schon erwähnt, liegen bei Argon die Verhältnisse etwas komplizierter, da die Hyperbel qualitativ den Anstieg von $\bar{q}$ nicht richtig wiedergibt. Die Absolutwerte von $\bar{q}$ zweier Gase verhalten sich nach (6) wie

$$\frac{\bar{q}_1}{\bar{q}_2} = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}.$$

Da bei Argon $\alpha = 16{,}4 \cdot 10^{-25}$ ist, so erhalten wir leicht

$$\bar{q}_{Ar} = \bar{q}_{He}\sqrt{\frac{\alpha_{Ar}}{\alpha_{He}}} = \bar{q}_{He}\sqrt{8},$$

$$\bar{q}_{Ar} = 12{,}6 \cdot 10^{-16}\,\text{cm}^2.$$

Bei einer Geschwindigkeit v entsprechend $V = 16$ Volt, für welche wir obige Rechnung durchgeführt haben, gibt Ramsauer folgenden Wert an

$$\bar{q}_{Ar} = 22{,}5 \cdot 10^{-16}\,\text{cm}^2.$$

Die Ursache für das Zustandekommen dieses großen Querschnitts wird im nächsten Abschnitt besprochen. Ich möchte noch erwähnen, daß wir die Polarisierbarkeit der Moleküle im vorigen natürlich nicht in ihrer allgemeinsten Form berücksichtigt haben. Es ist ja bekannt, daß der Dipol, den ein Molekül im elektrischen Feld $\mathfrak{E}$ annimmt, nicht mit $\mathfrak{E}$ gleichgerichtet zu sein braucht. Für Helium ist das z. B. durch Messung der Polarisation zerstreuten Lichtes festgestellt.

§ 2. Das Atom als elektrisches System.

Das Atom sei aufgebaut aus elektrischen Ladungen $e_\varkappa$, welche die Koordinaten $\xi_\varkappa$, $\eta_\varkappa$, $\zeta_\varkappa$ besitzen. In einem Aufpunkt $P(X, Y, Z)$, im Abstand r vom Nullpunkt des Koordinatensystems, stellt sich das elektrische Potential φ durch folgende Reihenentwicklung nach $\frac{1}{r}$ dar.

$$\varphi = \frac{\sum e_\varkappa}{r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{X}{r}\sum e_\varkappa\xi_\varkappa + \frac{Y}{r}\sum e_\varkappa\eta_\varkappa + \frac{Z}{r}\sum e_\varkappa\zeta_\varkappa\right] + \frac{1}{r^3}\left[\frac{1}{2}\left(3\frac{X^2}{r^2}-1\right)\sum e_\varkappa\xi_\varkappa^2 + \frac{1}{2}\left(3\frac{Y^2}{r^2}-1\right)\sum e_\varkappa\eta_\varkappa^2 + \frac{1}{2}\left(3\frac{Z^2}{r^2}-1\right)\sum e_\varkappa\zeta_\varkappa^2\right], \quad (7)$$

wobei wir das Koordinatensystem so gelegt denken, daß

$$\sum e_\varkappa\xi_\varkappa\eta_\varkappa = \sum e_\varkappa\eta_\varkappa\zeta_\varkappa = \sum e_\varkappa\zeta_\varkappa\xi_\varkappa = 0.$$

Das erste Glied der Reihe tritt nur bei Ionen auf, fällt also bei uns weg. Das zweite Glied stellt die Wirkung des sogenannten festen Dipols dar, der dadurch entsteht, daß der Schwerpunkt der positiven Ladungen des Moleküls nicht mit demjenigen der negativen zusammenfällt. Feste Dipole erzeugen eine starke Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten, die aber bei Edelgasen nicht auftritt. Wir lassen daher auch die Glieder mit $\frac{1}{r^2}$ weg und betrachten das Molekül als einen allgemeinen Quadrupol mit den elektrischen Hauptträgheitsmomenten

$$\Theta_1 = \sum e_\varkappa\xi_\varkappa^2, \quad \Theta_2 = \sum e_\varkappa\eta_\varkappa^2, \quad \Theta_3 = \sum e_\varkappa\zeta_\varkappa^2.$$

Daß in unserem Fall das Atom in einem gewissen Sinn doch als Dipol wirken kann, trotzdem es bei den andern bekannten statistischen Effekten (Zustandsgleichung, Dielektrizitätskonstante usw.) keinen solchen aufweist, wird noch am Schlusse dieses Paragraphen erörtert.

Die Ablenkung, welche ein freies Elektron im Felde eines Quadrupols erfährt, berechnen wir stufenweise in drei Schritten. Dabei rechnen wir wieder mit der gleichen Näherung wie früher.

a) Das Elektron bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v auf einer Geraden s. Eine Ladung E im senkrechten Abstand a von s erteilt demselben eine Impulsänderung senkrecht zu s in Richtung Z

$$m\dot{Z} = eE\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(a^2+s^2)^{3/2}}.$$

Y sei wieder parallel s, X senkrecht zu Y und Z, alles wie im vorigen Abschnitt. Setzen wir $s = vt$, so wird, nach Auswertung des Integrals

$$[\dot{Z}]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2eE}{mav}. \quad (8)$$

In Richtung der Geraden s selbst erfolgt im ganzen keine Impulsänderung, da die Kräfte in bezug auf den Punkt $s = 0$ symmetrisch sind.

b) Ablenkung herrührend von einem Stangenquadrupol. Unter einem solchen verstehen wir ein elektrisches System, für das nur eine der drei Konstanten Θ von 0 verschieden ist. Wir bauen ihn etwa auf aus drei Ladungen, welche auf einer Geraden liegen, also z. B. einer Ladung $-2E_i$ in der Mitte und symmetrisch dazu im Abstand l_i je eine Ladung E_i. Es wäre also

$$\Theta_i = 2E_i l_i^2.$$

Im Rahmen unserer Näherungsrechnung addieren sich die von den einzelnen Ladungen herrührenden Ablenkungen vektoriell. Die Impulsänderung berechnet sich nämlich als zeitliches Integral über die längs der Bahn am Elektron angreifende Gesamtkraft. Dieses Integral ist nun aber einfach gleich der Summe der entsprechenden Integrale über die Einzelkräfte. Die Ladung E_i besitze im oben eingeführten Koordinatensystem (X, Y, Z) die Koordinaten ξ_i, η_i, ζ_i. Ihr Abstand von der Bahngeraden s sei r_i. Dann ist.

$$r_i^2 = \xi_i^2 + (a-\zeta_i)^2.$$

E_i erteilt dem Elektron parallel der z-Achse nach (8) eine Impulsänderung

$$[m\dot{Z}_i]_{-\infty}^{+\infty} = -e\frac{2E_i}{r_i v}\frac{a-\zeta_i}{r_i}$$

und parallel der X-Achse

$$[m\dot{X}_i]_{-\infty}^{+\infty} = -\frac{2eE_i}{r_i v}\cdot\frac{\xi_i}{r_i}.$$

Wir entwickeln nach $\frac{\xi}{a}$ und $\frac{\eta}{a}$, wodurch wir erhalten

$$[\dot{Z}_i] = -\frac{2eE_i}{mav}\left[1 + \frac{\zeta_i}{a} + \frac{\zeta_i^2-\xi_i^2}{a^2} + \cdots\right],$$

$$[\dot{X}_i] = -\frac{2eE_i}{mav}\left[1 + \frac{2\zeta_i}{a} + \frac{\zeta_i^2-\xi_i^2}{a^2} + \cdots\right]\xi_i.$$

Summieren wir die Wirkungen der drei Ladungen des Stangenquadrupols, so erhalten wir für die von demselben bewirkte Geschwindigkeitsänderung des Elektrons die Komponenten

$$[\dot{Z}] = -\frac{2e\Theta}{ma^3v}\frac{\xi^2-\xi^2}{l^2} = -\frac{2e\Theta}{ma^3v}[\nu^2-\lambda],$$

$$[\dot{X}] = -\frac{2e\Theta}{ma^3v}\frac{\xi\zeta}{l^2} = -\frac{2e\Theta}{ma^3v}\nu\lambda,$$

wobei λ und ν je den Richtungskosinus des

Stangenquadrupols gegen X- und Z-Achse bedeuten.

c) Wir gehen über zum allgemeinen Quadrupol mit den elektrischen Hauptträgheitsmomenten Θ_1, Θ_2, Θ_3. Die von ihm ausgeübte Wirkung läßt sich durch Summation der Wirkungen der drei Stangenquadrupole berechnen. Verstehen wir jetzt unter $[\dot{Z}]$ und $[\dot{X}]$ die gesamte Geschwindigkeitsänderung des Elektrons in Z- und X-Richtung, so ist

$$[\dot{Z}] = -\frac{2e}{ma^3v}\sum_{k=1}^{3}\Theta_k[v_k^2 - \lambda_k^2],$$

$$[\dot{X}] = -\frac{2e}{ma^3v}\sum_{k=1}^{3}\Theta_k v_k\lambda_k.$$

Mit Hilfe dieser Formeln kann man für eine bestimmte Lage des Atoms die Ablenkung berechnen, indem man $\frac{\dot{Z}}{v}$ und $\frac{\dot{X}}{v}$ bildet. Der ablenkende Querschnitt eines Atoms hängt in diesem Falle nicht nur von den Blendenverhältnissen und der Lage des Atoms ab, sondern auch von dessen Orientierung. Die genaue Berechnung des Wirkungsquerschnitts würde sich deshalb ziemlich kompliziert gestalten. Wir bestimmen daher zuerst den Mittelwert der Ablenkung bei allen möglichen Orientierungen, aus welchem dann der Wirkungsquerschnitt nach der Methode des vorigen Paragraphen erhalten wird. Gesucht wäre also der Mittelwert des Absolutwertes der Ablenkung bei allen möglichen Orientierungen, für welche wir natürlich Gleichverteilung annehmen. Die Berechnung desselben gestaltet sich aber ziemlich umständlich, weshalb wir das Quadrat der Geschwindigkeitsänderung Δv^2 mitteln wollen. Es ist

$$\overline{\Delta v^2} = \overline{\dot{X}^2} + \overline{\dot{Y}^2}.$$

Zur Durchführung der Rechnung sind einige Mittelwerte über verschiedene Kombinationen der Richtungskosinusse nötig, die ich hier angebe,

$$\overline{v_i^2\lambda_i^2} = \frac{1}{15}, \qquad \overline{\lambda_i^4} = \overline{v_i^4} = \frac{1}{5},$$

$$\overline{v_i^2\lambda_k^2} = \frac{2}{15}, \qquad \overline{v_i\lambda_i v_k\lambda_k} = -\frac{1}{30},$$

wobei immer $i \neq k$ zu nehmen ist. Mit Hilfe dieser Werte erhält man leicht

$$\overline{\Delta v^2} = \frac{32}{15}\frac{e^2}{m^2a^6v^2}\left[(\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2) - (\Theta_1\Theta_2 + \Theta_2\Theta_3 + \Theta_3\Theta_1)\right].$$

Die in der Klammer auftretende Kombination der elektrischen Trägheitsmomente ist von der Berechnung der Zustandsgleichung[1]) her bekannt. Wir bezeichnen sie wie üblich mit τ^2, so daß gilt

$$2\tau^2 = (\Theta_1 - \Theta_2)^2 + (\Theta_2 - \Theta_3)^2 + (\Theta_3 - \Theta_1)^2.$$

Für den mittleren Ablenkungswinkel $\Delta\varphi$ finden wir

$$\Delta\varphi = \frac{\sqrt{\overline{\Delta v^2}}}{v} = \sqrt{\frac{32}{15}}\frac{e\tau}{ma^3v^2}, \qquad (9)$$

Falls also die Ablenkung der Elektronen durch die festen Quadrupole allein bedingt wäre, würden Wirkungsquerschnitt $q \sim a^2$ und v zueinander in folgender Beziehung stehen

$$q^3v^4 = \text{const.} \qquad (10)$$

Eine Kurve (I) von diesem Typus ist in Figur (3) gestrichelt eingetragen. Die stark ausgezogene Kurve ist die von Ramsauer[2]) experimentell bei Argon gefundene. (I) zeigt ein zu schwaches Ansteigen des Wirkungsquerschnitts bei kleiner werdenden Elektronengeschwindigkeiten. Da außerdem noch ein erheblicher Teil der Ablenkung durch die Polarisationskräfte erzeugt wird, müssen wir diesen mit dem Quadrupoleffekt superponieren. Das ergibt eine theoretische Kurve, welche noch etwas flacher verläuft als (I).

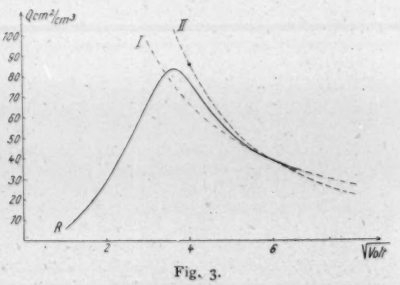


Fig. 3.

Da an der Sicherheit der Versuchsergebnisse wohl nicht zu zweifeln ist, kommen wir zu folgender Überlegung, welche bereits zum Inhalt des nächsten Abschnitts überleitet. Ein Atom, das sich für die statistische Berechnung der Dielektrizitätskonstanten oder der Zustandsgleichung in erster Näherung wie ein Quadrupol verhält, braucht dies in unserm Fall durchaus nicht zu tun. Denken wir uns etwa einen rotierenden Dipol (z. B. Keplerellipse mit Perihel-drehung), so wird dieses Gebilde als Quadrupol anzusehen sein, so lange die ausgeübte Wirkung

1) P. Debye, diese Zeitschr. **21**, 178, 1920.
2) C. Ramsauer, diese Zeitschr. **22**, 613, 1921.

als ein Mittelwert über eine, im Verhältnis zur Umlaufsdauer, große Zeit zu berechnen ist. Nun überstreichen aber Elektronen von einigen Volt Geschwindigkeit in der Zeit, die der Umlaufsdauer der Elektronen im Atom entspricht, bereits mehrere Å-Einheiten, so daß das Atom für solche Elektronen sehr gut als zeitlich variabler Dipol wirken kann, obschon es bei andern Effekten am besten durch einen Quadrupol genähert wird. Darüber soll im nächsten Paragraphen die Rede sein. Vorher wollen wir aber noch die Größenordnung der in Frage kommenden elektrischen Trägheitsmomente berechnen. Durch eine ganz analoge Überlegung wie im vorigen Abschnitt finden wir für den mittleren Wirkungsradius

$$\bar{a} = \frac{3}{4}\left(\frac{1{,}46\,\tau L}{V b}\right)^{1/2}. \qquad (11)$$

Vergleichen wir (11) mit (3), so folgt für dasjenige τ, welches das gleiche $\bar{a}_y$ erzeugt wie a, die Beziehung

$$\frac{a}{\tau} = 13{,}4 \cdot \bar{a} \cdot 10^8,$$

woraus sich die Größenordnung von τ berechnen läßt, wenn man für $\bar{a}$ einen Wert einsetzt, der mit den Experimenten im Einklang steht. Bei Helium ist für $V = 16$ Volt $\bar{a} \sim 10^{-8}$ cm, woraus für τ folgt

$$\tau \sim \frac{20{,}4 \cdot 10^{-26}}{13{,}4} = 1{,}52 \cdot 10^{-26}\ g^{1/2}\,cm^{7/2}\,sec^{-1}.$$

Aus der Zustandsgleichung von Helium habe ich früher gefunden[1])

$$\tau_{He} = 1{,}32 \cdot 10^{-26}.$$

Da dieser Wert sehr gut begründet ist, kann man wohl mit Sicherheit schließen, daß die vom Quadrupol herrührende Wirkung nicht größer ist als jene, die durch die Polarisierbarkeit erzeugt ist. Geben z. B. beide Ursachen für sich genommen die gleiche mittlere Ablenkung $\overline{\Delta\varphi'}$ in Abstand a, so ergibt sich für die ganze Ablenkung im Mittel

$$\overline{\Delta\varphi} = \overline{\Delta\varphi'}\sqrt{2}.$$

Man hat nämlich infolge der Unabhängigkeit beider Ursachen voneinander nicht die Absolutwerte, sondern deren Quadrate zu superponieren, Fassen wir unsere Resultate bei Helium zusammen, so finden wir, daß unter Zugrundelegung der optischen Konstanten

$$a_{He} = 2{,}04 \cdot 10^{-25}$$

und dem aus der Zustandsgleichung berechneten $\tau = 1{,}32 \cdot 10^{-26}$ die in § 1 und § 2 besprochenen Effekte Ablenkungen der Elektronen von der gleichen Größenordnung ergeben. Der daraus berechnete Wirkungsquerschnitt ergibt sich etwas größer als der experimentell gefundene.

Wir wollen noch überschlagsweise berechnen, welches τ bei Argon für 16 Volt Elektronen den gesamten Wirkungsquerschnitt

$$\bar{q} = 22{,}5 \cdot 10^{-16}\ cm^2$$

erklären könnte. Es ist nach (11)

$$\bar{a}_y = \frac{3}{4}\left(\frac{1{,}46\,\tau L}{V b_1}\right)^{1/2}.$$

Bei der Bestimmung von $\bar{a}_z$ treten hauptsächlich große Ablenkungswinkel auf, für welche (11) nicht mehr gilt. Wir werden daher annehmen, daß $\bar{a}_y$ und $\bar{a}_z$ im gleichen Verhältnis zueinander stehen wie im Falle polarisierbarer Moleküle, wo die exakte Rechnung folgendes ergab

$$\frac{\bar{a}_z}{\bar{a}_y} = \frac{1{,}88}{1{,}24}.$$

Unter dieser Voraussetzung, die ungefähr zutreffen wird, berechnet sich τ aus der Gleichung

$$\bar{q} = \pi\,\frac{9}{16}\left(\frac{1{,}46\,\tau L}{V b_1}\right)^{2/3}\frac{1{,}24}{1{,}88}.$$

Setzen wir die vorher genannten Werte von $\bar{q}$ und v ein, so finden wir

$$\tau = 6{,}16 \cdot 10^{-26}\ g^{1/2}\,cm^{7/2}\,sec^{-1}.$$

Dieser Wert wird natürlich verkleinert, wenn man berücksichtigt, daß ein bedeutender Teil der Ablenkung der Elektronen bereits durch die Polarisierbarkeit der Argonatome bestritten wird (siehe die Angaben am Schlusse von § 1). Eine genaue Berechnung des Wirkungsquerschnitts auf Grund beider Effekte ist hier nicht möglich, da wir für Quadrupole nur die Näherungsformel bei kleinen Ablenkungen besitzen. Schätzungsweise benötigt man ein τ von der Größe

$$\tau \sim 4 \cdot 10^{-26}\ g^{1/2}\,cm^{7/2}\,sec^{-1}.$$

Aus der Zustandsgleichung von Argon wurde früher berechnet[1])

$$\tau = 1{,}05 \cdot 10^{-26}.$$

Diese Zahl ist zwar auch nicht sehr genau, da mir für den Vergleich des theoretischen Virialkoeffizienten mit der Erfahrung nur Messungen in einem kleinen Temperaturintervall zur Verfügung standen, so daß die Variabilität des Atomdurchmessers mit der Temperatur nicht ermittelt werden konnte. Wie damals bei Helium gezeigt wurde, ist deren Berücksichtigung zur genauen Bestimmung von τ absolut notwendig. Immerhin ist der Unterschied zwischen den beiden für τ gefundenen Werten so beträchtlich, daß auch die quantitativen Verhältnisse zugunsten unserer früher angedeuteten Überlegung mit bezug auf Berücksichtigung eines zeitlich variabeln Dipols sprechen.

1) F. Zwicky, diese Zeitschr. **22**, 449, 1921.

1) F. Zwicky, diese Zeitschr. **22**, 449, 1921.

§ 3. Die Wirkung des vom Atom erzeugten Wechselfeldes.

Wir stellen folgende kleine Überschlagsrechnung an. Ein Elektron habe die Potentialdifferenz V durchlaufen. Es besitzt dann die Geschwindigkeit v

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}.$$

Das ergibt bei

$V = 1$ Volt $\quad v = 0{,}59 \cdot 10^8$ cm sec^{-1},
$V = 10$ Volt $\quad v = 1{,}88 \cdot 10^8$ cm sec^{-1}.

Nehmen wir an, daß wir die Kraftwirkungen zwischen Elektron und Atom bis auf einen gegenseitigen Abstand von z. B. $5 \cdot 10^{-8}$ cm zu berücksichtigen haben. Das Elektron befindet sich dann während der Zeit t im Wirkungsbereich des Atoms, wobei

$t = 16{,}8 \cdot 10^{-16}$ sec bei $V = 1$ Volt,
$t = 5{,}3 \cdot 10^{-16}$ sec bei $V = 10$ Volt.

Von dieser Größenordnung sind aber auch die Umlaufszeiten der Elektronen im Atom. Für die Berechnung der Ablenkung von freien Elektronen ist daher die momentane Lage der zeitlich variablen Elektronenkonfiguration von Bedeutung. Die Entwicklung (7) des elektrostatischen Potentials stellt in unserem Falle nur eine ganz grobe Näherung an die wirklichen Verhältnisse dar. Die Wirkungsweise der Polarisation bleibt von diesen Überlegungen im wesentlichen unberührt.

Die Berücksichtigung mit der Zeit veränderlicher Kraftfelder ergibt naturgemäß einen komplizierteren Zusammenhang der Ablenkungen mit den Geschwindigkeiten als in den vorher besprochenen Fällen. Daß dabei eine Verkleinerung des Wirkungsquerschnitts mit abnehmender Elektronengeschwindigkeit resultieren kann, sieht man leicht am Modell eines schwingenden Dipols ein. Fährt nämlich das freie Elektron in einer Zeit t durch die Wirkungssphäre desselben, die gleich ist der Dauer einer Schwingung, so erfährt es in erster Näherung überhaupt keine Ablenkung, d. h. die auftretenden Ablenkungen kompensieren sich gegenseitig. Die in Frage kommende kritische Geschwindigkeit liegt in der Gegend von 1 bis 10 Volt, wie wir vorher gesehen haben. Das entspricht den Versuchsresultaten. Um einen vorläufigen Überblick zu bekommen, wie die (q, v)-Kurve sich gestaltet, berechnen wir dieselbe für den schematischen Fall des schwingenden Dipols, wobei wir die gleiche Näherungsmethode (kleine Ablenkungen) benutzen wie früher. Wir verwenden wieder das Koordinatensystem (X, Y, Z). Das kräftefreie Elektron würde sich auf einer Geraden $g \parallel Y$ bewegen, welche vom Nullpunkt den senkrechten Abstand a hat. Der Dipol vom Moment El liege in der Ebene (Y, Z) und bilde mit der Z-Achse den Winkel β. Das ist eine kleine Einschränkung, welche bedeutet, daß wir von der, von einem beliebigen Dipol erzeugten Impulsänderung nur die Komponenten in der Y- und Z-Richtung berechnen. Da die Ablenkung nach X mit den beiden andern Komponenten „synchron" geht, bewirkt die gemachte vereinfachende Einschränkung keine wesentliche Änderung der (q, v)-Kurve.

Die variable Länge l des Dipols folge dem Gesetz

$$l = l_0 \cos(\omega t + \nu).$$

Es sei weiter a der variable Abstand der schwingenden Ladung E von der Geraden g. Vom Fußpunkt des Lots von E auf g bis zum freien Elektron sei der Abstand s vorhanden. Dann ist

$$a = a_0 + l_0 \cos\beta \cos(\omega t + \nu) = a_0 + \lambda_1 \cos(\omega t + \nu),$$
$$s = s_0 + l_0 \sin\beta \cos(\omega t + \nu) = s_0 + \lambda_2 \cos(\omega t + \nu).$$

Die auf das freie Elektron in der Z-Richtung wirkende Kraftkomponente $K_Z^{(1)}$, herrührend von der bewegten Ladung, wird also

$$K_Z^{(1)} = \frac{eEa}{(a^2 + s^2)^{3/2}} =$$
$$= \frac{eE[a_0 + \lambda_1 \cos(\omega t + \nu)]}{[a^2 + s_0^2 + 2(s_0\lambda_1 + a_0\lambda_2)\cos(\omega t + \nu)]^{3/2}}.$$

Von der ruhenden Ladung erhalten wir den Anteil $K_Z^{(2)}$

$$K_Z^{(2)} = -\frac{eEa_0}{[a_0^2 + s_0^2]^{3/2}}.$$

Entwickeln wir nach den relativ zu a_0 unendlich kleinen Größen λ_1, λ_2, so gewinnen wir für die Z-Komponente der Gesamtkraft den Ausdruck

$$K_Z = K_Z^{(1)} + K_Z^{(2)} = -eE\left[\frac{\lambda_1}{(a_0^2 + s_0^2)^{3/2}} + 3a_0\frac{s_0\lambda_1 + a_0\lambda_2}{(a_0^2 + s_0^2)^{5/2}}\right]\cos(\omega t + \nu).$$

Setzen wir noch $s_0 = vt$, so resultiert eine Impulsänderung

$$m[\dot{Z}]_{-\infty}^{+\infty} = -eE\left[\lambda_1\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(a_0^2 + v^2t^2)^{3/2}}\cos(\omega t + \nu) + 3a_0^2\lambda_2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(\omega t + \nu)\,dt}{(a^2 + v^2t^2)^{5/2}}\right.$$
$$\left. + 3a_0\lambda_1 v\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t\,dt}{(a_0^2 + v^2t^2)^{5/2}}\cos(\omega t + \nu)\right].$$

Nach partieller Integration des letzten Integrals erhält man

$$[\dot{Z}]_{-\infty}^{+\infty} = -\frac{eE}{m}\left[\lambda_1 J_1 + 3a_0^2\lambda_2 J_2 + \frac{a_0\lambda_1\omega}{v} J_3\right], \tag{12}$$

wobei

$$J_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega t + \nu)\,dt}{(a_0^2 + v^2t^2)^{5/2}}.$$

Die Integrale J_1, J_2 und J_3 lassen sich durch Besselsche Funktionen ausdrücken. Für die qualitative Übersicht ist folgende Näherung sehr geeignet. Man setzt nämlich in bekannter Weise an Stelle von

$$(a_0^2 + v^2t^2)^{-n}$$

die Funktion

$$\frac{1}{a_0^{2n}} e^{-n\frac{v^2}{a_0^2}t^2}.$$

Berücksichtigen wir noch, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\omega t \cdot e^{-n\frac{v^2}{a_0^2}t^2}\,dt = 0$$

ist, so erhalten wir

$$J_1 = \frac{\cos\nu}{a_0^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega t\, e^{-\frac{3}{2}\frac{v^2}{a_0^2}t^2}\,dt = \frac{\cos\nu}{va_0^2}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\, e^{-\frac{\omega^2 a_0^2}{6v^2}},$$

$$J_2 = \frac{\cos\nu}{a_0^5}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega t\, e^{-\frac{5}{2}\frac{v^2}{a_0^2}t^2}\,dt = \frac{\cos\nu}{va_0^4}\sqrt{\frac{2\pi}{5}}\, e^{-\frac{\omega^2 a_0^2}{10v^2}},$$

$$J_3 = \frac{\sin\nu}{a_0^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega t\, e^{-\frac{3}{2}\frac{v^2}{a_0^2}t^2}\,dt = \frac{\sin\nu}{va_0^2}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\, e^{-\frac{\omega^2 a_0^2}{6v^2}}.$$

Aus (12) ergibt sich der Ablenkungswinkel $\Delta\varphi = \frac{[\dot{Z}]}{v}$

$$\Delta\varphi = -\frac{eEl_0}{mv^2a_0^2}\sqrt{2\pi}\left[\frac{\cos\beta\cos\nu}{\sqrt{3}}\, e^{-\frac{\omega^2a_0^2}{6v^2}} + \frac{\sin\beta\cos\nu}{\sqrt{5}}\, e^{-\frac{\omega^2a_0^2}{10v^2}} + \frac{\cos\beta\sin\nu}{\sqrt{3}}\,\frac{a_0\omega}{v}\, e^{-\frac{\omega^2a_0^2}{6v^2}}\right]. \tag{13}$$

Dabei ist nicht berücksichtigt, daß v auch in der Bahngeraden eine Änderung erfährt, was die Vernachlässigung einer Ablenkung von der Ordnung $\Delta\varphi^2$ bedeutet. $\Delta\varphi$ kommt also zustande als Überlagerung dreier Funktionen vom Typus

$$f(v) = \frac{c_1}{v^n}\, e^{-\frac{c_2}{v^2}}.$$

Die Funktion $f(v)$ ist für $v = 0$ exponentiell null. Für $v = \infty$ wird $f(v)$ ebenfalls null. Zwischen diesen beiden Werten hat sie ein Maximum bei

$$v_M = \sqrt{\frac{2c_2}{n}}.$$

Mit $n = 2$ ist also

$$v_M = \sqrt{c_2}.$$

Mit $n = 3$

$$v_M = \sqrt{\frac{2c_2}{3}}.$$

Für unsere drei Funktionen liegen die Maxima bei

$$v_1 = \frac{\omega a_0}{\sqrt{6}}, \quad v_2 = \frac{\omega a_0}{\sqrt{10}}, \quad v_3 = \frac{\omega a_0}{3}.$$

Wir kommen damit bei dem kritischen Punkt, wo $\Delta\varphi$ ein Maximum besitzt, zu einer Größenbeziehung zwischen v, a und ω, wie wir sie schon vorher durch eine Überschlagsrechnung festgestellt haben.

Wir bestimmen wieder wie im vorigen Abschnitt $\overline{\Delta\varphi^2}$, indem wir $\Delta\varphi^2$ über alle β und ν von 0 bis π bzw. 0 bis 2π mitteln. Diese Mittelung ergibt

$$\sqrt{\overline{\Delta\varphi^2}} = \frac{eEl_0}{mv^2a_0^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{3}\, e^{-\frac{1}{3}\left(\frac{\omega a_0}{v}\right)^2}\left\{1 + \left(\frac{\omega a_0}{v}\right)^2\right\} + \frac{1}{5}\, e^{-\frac{1}{5}\left(\frac{\omega a_0}{v}\right)^2}\right]^{1/2}. \tag{14}$$

Im Falle $\omega = 0$, d. h. für einen festen Dipol, kann man nach den Methoden des vorigen Paragraphen die Rechnung direkt durchführen und erhält leicht

$$\sqrt{\overline{\Delta\varphi_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{e\mu_0}{ma_0^2v^2}, \tag{15}$$

wo das Dipolmoment El_0 mit μ_0 bezeichnet ist. (In diesem Falle würden q und v zueinander in der Beziehung stehen

$$qv^2 = \text{const.}$$

Die entsprechende Kurve ist in Fig. 3 mit der Bezeichnung (II) eingezeichnet. Das starke An-

wachsen von q mit abnehmendem v kann also der Mitwirkung eines Dipolfeldes zugeschrieben werden.) Daß (14) für $\omega = 0$ nicht genau in (15) übergeht, sondern davon um einen Faktor $\sqrt{\frac{7\pi}{15}}$ verschieden ist, rührt natürlich davon her, daß wir nur durch näherungsweise Integration zu (14) gelangt sind. Um (14) eine physikalisch anschauliche Gestalt zu geben, führen wir folgende Größen ein.

$$E_1 = \frac{e\mu_0}{a_0^2},$$

mißt die potentielle Energie eines Elektrons im Abstand a_0 von einem Dipol μ_0.

$E_2 = mv^2$ mißt die kinetische Energie des Elektrons.

$\chi = \frac{\omega a_0}{v}$ mißt das Verhältnis von Atomradius zu derjenigen Strecke, die vom freien Elektron zurückgelegt wird in der Zeit eines Elektronenumlaufs im Innern des Atoms. Es ist dann

$$\sqrt{\Delta q^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{E_1}{E_2} F(\chi).$$

$F(\chi)$ nimmt für $X = 0$ den Wert eins an. In Fig. 4 sind die beiden Faktoren $\frac{E_1}{E_2}$ und $F(\chi)$ als Funktionen von v qualitativ gezeichnet.

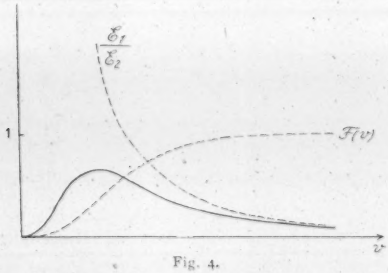


Fig. 4.

Die stark ausgezogene Kurve stellt $\sqrt{\Delta q^2}$ dar. Damit auch sie für $v = 0$ den Wert Null annimmt, was für uns wesentlich ist, muß offenbar $F(\chi)$ an dieser Stelle von höherer Ordnung null werden als die Funktion v^2. In (14) ist das natürlich der Fall, da $F(\chi)$ für $\chi = \infty$ oder $v = 0$ sogar exponentiell null wird. Um zu beweisen, daß das nicht etwa durch unsere näherungsweise Integration (Einführung der Fehlerfunktion e^{-x^2}) vorgetäuscht wird, wollen wir noch kurz den Typus der strengen Lösung angeben. Nach (12) handelt es sich um strenge Berechnung von Integralen vom Typus

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos zu}{(1+u^2)^{p+1/2}}.$$

Es ist

$$A = 2\int_0^{\infty} \frac{\cos zu}{(1+u^2)^{p+1/2}}\,du =$$

$$= \frac{2}{i}\int_{u=0}^{\infty} \frac{\cos(-iz)(iu)}{[1-(iu)^2]^{p+1/2}}\,d(iu) =$$

$$= \frac{2}{i}\int_0^{i\infty} \frac{\cos(-izu)}{(1-u^2)^{p+1/2}}\,du =$$

$$= \frac{2}{i}\int_{1\to 0\to i\infty} \frac{\cos izu}{(1-u^2)^{p+1/2}}\,du - \frac{2}{i}\int_1^0 \frac{\cos(-izu)}{(1-u^2)^{p+1/2}}\,du.$$

Das erste Integral ist auf dem komplexen Wege $1 \to 0 \to i\infty$ zu führen. Das zweite[1]) ist direkt eine Besselsche Funktion vom Index -2.

$$\int_0^1 \frac{\cos(-izu)}{(1-u^2)^{p+1/2}}\,du = \frac{1}{\Xi} J_{-2}(-iz) =$$

$$= \frac{1}{2\Xi}\left[H^{(1)}_{-2}(-iz) + H^{(2)}_{-2}(-iz)\right],$$

wobei $H^{(1)}$, $H^{(2)}$ die beiden Hankelschen Funktionen bedeuten und

$$\Xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{(\frac{1}{2}z)^p}{\Gamma(p-\frac{1}{2})} \text{ ist. } (\Gamma = \text{Gammafunktion.})$$

Wir finden weiter

$$A = -\frac{1}{i}\int_{i\infty\to 0\to 1} \frac{e^{i(iz)u}}{(1-u^2)^{p+1/2}}\,du -$$

$$-\frac{1}{i}\int_{i\infty\to 0\to 1} \frac{e^{i(iz)u}}{(1-u^2)^{p+1/2}}\,du + \frac{2}{i\Xi} J_{-2}(-iz),$$

oder nach Jahnke-Emde

$$A = -\frac{1}{i\Xi} H^{(1)}_{-2}(iz) - \frac{1}{i\Xi} H^{(1)}_{-2}(-iz) +$$

$$+ \frac{2}{i\Xi} J_{-2}(-iz) =$$

$$= \frac{1}{i\Xi}\left[H^{(2)}_{-2}(-iz) - H^{(1)}_{-2}(iz)\right].$$

Der Wert $z = \infty$ entspricht bei uns $v = 0$. Für $z = \infty$ gelten nun die asymptotischen Formeln

$$H^{(1)}_p(x)\sqrt{\frac{\pi x}{2}} = e^{i\left(x - \frac{2p+1}{4}\pi\right)} S_p(-2ix),$$

$$H^{(2)}_p(x)\sqrt{\frac{\pi x}{2}} = e^{-i\left(x - \frac{2p+1}{4}\pi\right)} S_p(2ix).$$

1) Jahnke-Emde, Funktionentafeln, S. 170. Leipzig u. Berlin 1909.

Da S_f eine halbkonvergente Reihe darstellt, die für $x = \pm i\infty$ gegen den Wert eins strebt, wird also tatsächlich A für $z = \infty$ exponentiell null, womit unsere Behauptung gerechtfertigt ist.

Damit sind wir für Δq oder den Wirkungsquerschnitt q als Funktion von v zu Kurven gelangt, die genau denselben Typus zeigen, wie die von Ramsauer bei den Edelgasen experimentell gefundenen.

Die bis jetzt behandelten Effekte haben allgemeine Bedeutung. Zum Schluß wollen wir noch darauf eingehen, wodurch das spezielle Verhalten von Argon bei sehr kleinen Elektronengeschwindigkeiten verursacht wird. Experimentell ist nämlich sichergestellt, daß der Wirkungsquerschnitt q für v in der Gegend von 1 Volt Werte annimmt, die sicher nur einen Bruchteil der von den inneren Elektronenbahnen überstrichenen Fläche darstellen. Man verfällt natürlich zuerst auf den Gedanken, daß die freien Elektronen durch das Atom hindurchfahren. Doch ist nicht einzusehen, warum es dies gerade nur bei ganz kleinen Geschwindigkeiten tun sollte, bei größeren aber nicht. In der Tat ist bis heute, so viel mir bekannt ist, kein Grund dafür angegeben worden. Meine Meinung geht nun dahin, daß auch bei ganz kleinen v, die freien Elektronen sich immer außerhalb des Atoms befinden. Damit aber die Experimente gedeutet werden können, müssen sie sich unter Umständen über das Atom hinweg bewegen können. Daß ein solches Verhalten nicht ausgeschlossen ist, sieht man etwa an folgendem Beispiel ein. In einer Ebene Σ bewege sich ein Elektron kreisförmig um einen einfach geladenen Kern (Wasserstoffmodell). Ein freies Elektron fliege normal zu Σ direkt auf den Kern zu. Es greift an ihm eine Kraft an, deren Komponente parallel Σ gleichförmig die Richtung ändert. Das freie Elektron wird also anfangen, eine Spiralbahn zu beschreiben. Die Schleifen derselben werden um so weiter, je langsamer es sich bewegt. Bei einer gewissen kritischen Geschwindigkeit wird die Spiralbahn über das Atom hinwegstreifen. Damit sich das freie Elektron sehr weit hinter dem Atom wieder auf derselben Geraden bewegt wie weit vor dem Atom, dazu sind natürlich noch bestimmte Einschränkungen in bezug auf das Kraftfeld notwendig, die nicht von jedem elektrodynamischen System erfüllt werden. Daß dies aber bei Argon und wie es scheint, auch bei höheren Edelgasen der Fall ist, macht unsere Vermutung wahrscheinlicher, da für die Atome dieser Gase aus anderen physikalischen Effekten eine hohe Symmetrie festgelegt ist.

Zum Schlusse wollen wir noch zeigen, daß in der Nähe von v entsprechend 1 Volt die Spiralbahnen tatsächlich Öffnungen von der Größenordnung 10^{-8} cm erhalten. Wir denken uns z. B. ein Elektron gegen einen schwingenden Dipol fliegend und bestimmen dimensionsmäßig die Ausweichung Δ, die es in der Entfernung a vom Dipol hat. Der Dipol habe einen Maximalmoment μ_0 und die Kreisfrequenz ω. Δ kann dann abhängen von den früher benutzten Größen

$$E_1 = \frac{\mu_0 e}{a_0^2}, \quad E_2 = m v^2,$$

sowie von a_0 und ω. Das letztere wird nicht bestimmend auftreten, da sich für $\omega = 0$ folgender Zusammenhang ergeben muß

$$\Delta \sim a_0 \frac{E_1}{E_2}. \tag{16}$$

Ich habe den Fall auch noch genauer durchgerechnet und gefunden, daß bei $\omega \neq 0$ dieser Ausdruck mit einer dimensionslosen Funktion von a_0, v und ω zu multiplizieren ist. Diese Funktion ist für die im folgenden verwendeten Zahlenwerte von der Größenordnung eins. Wir können uns also der Formel (16) bedienen

$$\Delta \sim \frac{\mu_0 e}{m a_0 v^2} = \frac{\mu_0}{2aV}.$$

Setzen wir $V = 1$ Volt $= 1/300\ es$, $\mu_0 \sim 10^{-18}$ cm, $a_0 \sim 10^{-8}$ cm, so ist

$$\Delta \sim 1{,}5 \cdot 10^{-8}\ \text{cm}.$$

Damit ist also gezeigt, daß nicht mit einem Eindringen der Elektronen ins Innere der Atome gerechnet werden darf. Bei größeren v fliegen die Elektronen direkt auf das Atom los, werden aber in einer Entfernung von ungefähr 10^{-8} cm infolge der im Wechselfeld auftretenden abstoßenden Kräfte, elastisch reflektiert, wie P. Debye[1]) gezeigt hat, und wie es mit den Versuchen von Franck und Hertz[2]) in Einklang steht.

Der Zweck dieser Ausführungen war, in orientierender Weise zu zeigen, daß eine Interpretation der Versuche über langsame Elektronen auf Grund einfacher Voraussetzungen möglich erscheint. Um sichere Schlüsse über den Atombau und insbesondere die auftretenden Umlaufsfrequenzen ziehen zu können, ist natürlich eine genauere Ausarbeitung notwendig.

Herrn Prof. Debye bin ich für wertvolle Ratschläge, betreffend die rechnerische Durchführung der Arbeit, zu Dank verpflichtet.

1) P. Debye, diese Zeitschr. **22**, 302, 1921.
2) J. Franck u. G. Hertz, diese Zeitschr. **17**, 409 u. 430; **20**, 132, 1919.

Zürich, 15. März 1923, Physik. Institut d. Eidg. Techn. Hochschule.

(Eingegangen 20. März 1923.)

BESPRECHUNGEN.

Wilhelm Hort, Technische Schwingungslehre. Ein Handbuch für Ingenieure, Physiker und Mathematiker bei der Untersuchung der in der Technik angewendeten periodischen Vorgänge. Zweite völlig umgearbeitete Auflage. 8°. VIII u. 828 S. m. 423 Textfiguren. Berlin, Julius Springer. 1922. Grundpreis gebunden M. 20.—.

Dem vorliegenden Buch liegt der Gedanke zugrunde, daß die Schwingungslehre ein in sich geschlossenes Gebiet der technischen Physik darstellt. Die Behandlungsweise der Schwingungen verschiedenster Art ist im Grunde genommen die gleiche, so daß ein Zerhacken des Stoffes nach physikalischen Teilgebieten innerlich nicht begründet ist. Deshalb ist eine zusammenfassende Darstellung der gesamten technischen Schwingungslehre, wie sie Hort in seinem Buche gibt, ein sehr wünschenswertes und zweifellos auch ein sehr reizvolles Unternehmen.

Verf. beginnt mit den einfachsten Beispielen für freie, ungedämpfte Schwingungen; es folgt ein Kapitel über freie gedämpfte Schwingungen, wobei auch schon quadratische Dämpfung berücksichtigt wird. Das 3. Kapitel beschäftigt sich mit den einfachsten Beispielen für erzwungene Schwingungen und im 4. Kapitel werden die Instrumente zur Aufzeichnung von Schwingungen besprochen. Auf diese der allgemeinen Einführung dienenden Kapitel folgt ein kurzer Überblick über die allgemeinen Grundlagen aus der theoretischen Mechanik (5. Kapitel) und über die wichtigsten analytischen und graphischen Methoden (6. Kapitel) der Schwingungsbehandlung. Sodann wendet sich Verf. spezielleren Fragen zu, zunächst den Schwingungen mit einem Freiheitsgrad in der Maschinentechnik (7. Kapitel). An der Spitze des nächsten Kapitels über Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden stehen die technischen Anwendungen des Doppelpendels. Es folgen (9. Kapitel) die Schwingungserscheinungen bei Fahrzeugen (Schwingungen von Wasser- und Luftfahrzeugen und von Lokomotiven) und die Anwendungen des Kreisels in der Technik (10. Kapitel). Sodann werden die Schwingungen von Saiten, Membranen, Platten, Stäben, die Schiffsvibrationen, Schwingungen von Leuchttürmen, Brücken und Fachwerken und ähnliche Probleme behandelt (11. Kapitel). Kapitel 12 und 13 beschäftigen sich mit den Schwingungen von Flüssigkeiten und von Gasen. Im 14. Kapitel werden elektrisch-mechanische Schwingungen mit besonderer Berücksichtigung der Schallsender und Schallempfänger besprochen, im 15. Kapitel Koppelschwingungen und im 16. die Schwingungserzeugung durch unperiodische Kräfte, wobei auch die Schwingungen in Elektronenröhren mitbehandelt werden. Kapitel 17 enthält die elektromagnetischen Schwingungsvorgänge auf geradlinig ausgestreckten Leitern (Telegraphengleichung, Telephon- und Telegraphenkabel) und Kapitel 18 diejenigen im Raume. Das letzte Kapitel ist in der Hauptsache den sogenannten pseudoharmonischen Schwingungen (Theorie der Kombinationstöne) gewidmet. Eine ausführliche Literaturübersicht sowie Sach- und Namenverzeichnis beschließen das Buch.

Gegenüber der ersten Auflage sind namentlich die elektromagnetischen Schwingungen ausführlicher behandelt worden. Wenn sie auch jetzt noch etwas stark in den Hintergrund treten, so läßt sich das wohl kaum vermeiden, soll nicht der Umfang des Buches gar zu sehr anschwellen. Im ganzen genommen scheint dem Referenten die schwierige Frage der Auswahl und Anordnung des Stoffes in glücklicher Weise gelöst zu sein. Die Darstellung zeichnet sich durch besondere Einfachheit und Klarheit aus. Besonders zu rühmen ist es, daß trotz der erstaunlich großen Zahl der behandelten Einzelprobleme die größeren Gesichtspunkte nicht zu kurz kommen. Das Hortsche Buch gehört nach Ansicht des Ref. zu den schönsten Büchern der technisch-physikalischen Literatur und wird jedem, der es liest, reiche Belehrung und Anregung geben.

E. Waetzmann.

H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, Das Relativitätsprinzip. Eine Sammlung von Abhandlungen. Mit einem Beitrag von H. Weyl und Anmerkungen von A. Sommerfeld und Vorwort von O. Blumenthal. (Fortschritte der mathematischen Wissenschaften in Monographien. Herausgegeben von O. Blumenthal. Heft 2.) gr. 8°. 159 S. Vierte Auflage. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1922. M. 40.—, geb. M. 48.— u. T.-Z.

Trotz der vielen guten und weniger guten Lehrbücher der Relativitätstheorie ist es manchmal nötig, die grundlegenden Abhandlungen selbst zu lesen. Eben deshalb ist die vorliegende Sammlung willkommen. Die dritte Auflage enthielt außer den grundlegenden Abhandlungen über die spezielle Relativitätstheorie die wichtigsten von denen, in welchen Einstein die Prinzipien der allgemeinen Relativitätstheorie niedergelegt hatte. In der vierten Auflage ist auch die Abhandlung von H. Weyl über Gravitation und Elektrizität aufgenommen worden.

Brody.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

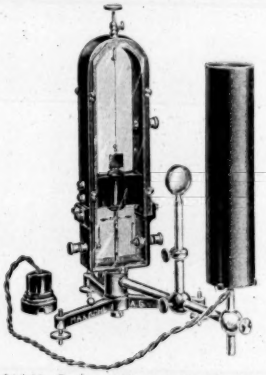
Ernannt: Der a.o. Professor an der Technischen Hochschule Wien Dr. Emil Abel zum ord. Professor für Physikalische Chemie ebenda, Oberregierungsrat, Geheimrat Professor Dr. Eugen Brodhun, Mitglied der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in Berlin, zum Direktor bei dieser Anstalt.

Berufen: Der ord. Professor d. Exp. Physik an der Universität Marburg Dr. Clemens Schäfer zum ord. Professor der Exp. Physik an der Technischen Hochschule Dresden (als Nachfolger von W. Hallwachs).

Gestorben: Der frühere Professor der Chemie an der Western Reserve University in Cleveland Ohio Dr. Edward Williams Morley.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Hans Küstner in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Max Kohl A.G. Chemnitz



61392. Drehspul-Spiegelgalvanometer.

Physikalische Apparate

Funken-Induktoren

Ölluftpumpen

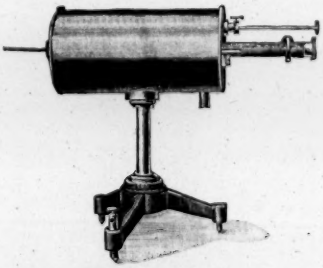
Experimentier-Schalttafeln

Projektions-Apparate

Laboratorienmöbel

in gediegener Ausführung.

Weltausstellung Brüssel: 4 Grosse Preise; Turin: 2 Grosse Preise; Dresden: Grosser Preis.



Apparate für luftelektrische und radioaktive Untersuchungen.
Normalbatterie für elektrostatische Messungen.
Kondensatoren, Mikrowage.
Erdbebenregistrierapparate.

Spindler & Hoyer G.m.b.H.
Mechan. u. opt. Werkstätten
Göttingen 3.

Hochspannungs-Batterien

Vorzüge: Größte Leistung bei kleinstem Raum. Beliebige Trennbarkeit. Niedriger Preis.

Phywe-Hochspannungsbatterien
haben u. a. im Gebrauch:

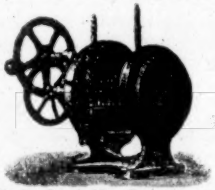
Kaiser Wilhelm-Institut, Dahlem. — Institut für Experimentalphysik, Universität Göttingen. — Institut für theoret. Physik, Universität Göttingen. — Physikal. Institut der Bergakademie Clausthal. — Röntgen-Institut, Techn. Hochschule Stuttgart. — Physikalisches Institut, Universität Frankfurt. — Physikal.-Chem. Institut, Technische Hochschule Karlsruhe. — Physikalisches Institut, Technische Hochschule Karlsruhe. — Teyler-Museum, Universität Leiden-Haarlem. — Radium-Institut, Freiberg i. S. — Institut für Schwachstromtechnik, Dresden. — Realgymnasium Schwelm. — Institut für theoretische und physikalische Chemie, Freies Bildungswesen, Altona. — Naturkundig Laboratorium der Universität Groningen. — Porzellanfabrik Rosenthal, Selb. — Institut für theoretische und physikalische Chemie, Universität Brünn. — Physikalisches Institut, Universität Wilna. — Chemische Fabrik Griesheim-Elektron, Griesheim. — Kaiser Wilhelm-Institut. Düsseldorf. — Physikalisches Institut, Universität Czernauti. — Physikalisches Laboratorium der medizinischen Fakultät, Posen. — Physikalisches Institut, Universität Helsingfors. — Koch & Sterzel, Dresden. — W. C. Heraeus, Hanau.

Physikalische Werkstätten A.-G.,
Göttingen 1

Arthur Pfeiffer, Wetzlar

Gegründet 1890

Fabrik physikalischer, chemischer und technischer Apparate

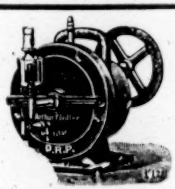


Rotier. Quecksilber-Hochvakuumpumpe System Pfeiffer. D. R. P.

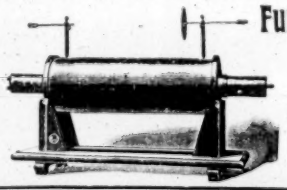
Spezialfabrik für Hochvakuumpumpen

zu wissenschaftlichen und technischen Zwecken

Alle Arten Luftpumpen, Kolben-Ölluftpumpen, rotierende Ölluftpumpen, rotierende Quecksilberluftpumpen für Betrieb und Laboratorium



Rotierende Quecksilber-Hochvakuumpumpe System Gaede. D. R. P.



Funkeninduktoren bis 1000 mm Funkenlänge

Normaltypen von 6—1000 mm Funkenlänge mit Unterbrechern aller Art

Spezial-Funkeninduktoren für technische und wissenschaftliche Zwecke

Listen kostenlos von Abteilung E verlangen.

E. Leybold's Nachf. A.-G.

Cöln a/Rhein

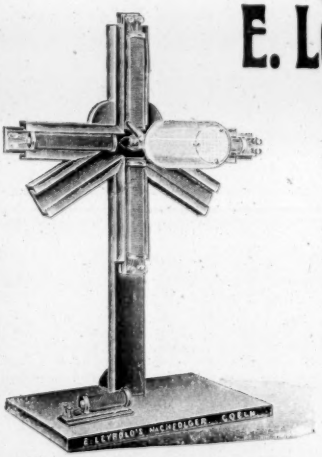
Fabrik physikalischer Apparate

Zweigniederlassung:

Berlin NW 7, Dorotheenstraße 53

Projektionsapparate für Diaskopie und Episkopie

Hochvakuumpumpen nach Gaede



Universalstativ für Braun'sche Röhre nach Simon und Reich.

Katalog, enthaltend 16000 Nummern, wird Instituten auf Wunsch übersandt.

Für den Anzeigenteil verantwortlich S. Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.